数　列

検　印

「数列」では次のことを学習しました．これらについて，以下の質問に答えてください．

等差数列	等差数列の和	等比数列	等比数列の和
自然数の和	自然数の平方の和	自然数の立方の和	和の記号 Σ
階差数列	漸化式	数学的帰納法	

質問❶　どの内容がよく理解できましたか．

質問❷　どの内容がよく理解できませんでしたか．

質問❸　どの内容を楽しく学ぶことができましたか．

質問❹　どの内容を楽しく学ぶことができませんでしたか．

質問❺　「数列」の学習を振り返り，良かった点，悪かった点を自由に記述してください．

年　　組　　番　氏名

1 等差数列ってなに？

❶ 数列

1, 4, 7, 10, 13, ...

のように，ある規則にしたがって数を１列に並べたものをア$\boxed{}$という．

また，並んでいる各々の数のことをイ$\boxed{}$といい，はじめから順にウ$\boxed{}$，エ$\boxed{}$，オ$\boxed{}$，⋯，カ$\boxed{}$，⋯という．また，カ$\boxed{}$がnについての式で書けるとき，特にキ$\boxed{}$という．

数列を一般的に表すには，

a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...　あるいは　$\{a_n\}$

という書き方が用いられる．

❷ 等差数列

数列 1, 4, 7, 10, 13, ...

について考えてみよう．この数列は初項ク$\boxed{}$に，ケ$\boxed{}$を次々に加えていくことでできる．

このように，初項に一定の数を次々に加えていってできる数列をコ$\boxed{}$といい，加えていく一定の数のことをサ$\boxed{}$という．

上の数列は「初項１，公差３の等差数列」といういい方をする．この数列の一般項を求めてみよう．この数列について次のことがいえる．

第２項を求めるには，初項１に公差３をシ$\boxed{}$回加えればよい．

第３項を求めるには，初項１に公差３をス$\boxed{}$回加えればよい．

第４項を求めるには，初項１に公差３をセ$\boxed{}$回加えればよい．

⋮

第n項を求めるには，初項１に公差３をソ$\boxed{}$回加えればよい．

よって，一般項（第n項）は

タ$\boxed{}$

一般的に次のことがいえる.

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列の一般項 a_n は,

例題❶ 等差数列 15, 11, 7, 3, −1, ... の一般項 a_n を求めよ.

解

問題① 初項9，公差−5の等差数列の一般項 a_n を求めよ.

問題② 次の等差数列の公差と一般項を求めよ.

(1) −7, 0, 7, 14, 21, ...

(2) $1,\ \dfrac{3}{2},\ 2,\ \dfrac{5}{2},\ 3,\ \ldots$

問題③ 次の問いに答えよ.

(1) 第 3 項が 13，公差が 5 の等差数列の初項を求めよ.

(2) 初項が 8，第 4 項が 2 の等差数列の公差を求めよ.

(3) 初項が 4，公差が 3，末項が 31 の等差数列の項数を求めよ.

年　　組　　番　氏名

2 等差数列を足そう

❶ ガウスの方法

数学者ガウスが小学生の頃の話である. ある日の授業で, 1 から 100 までの数をすべて足すという課題が出された. 先生は時間がかかると思っていたのだが, ガウスは即座に解答してしまった. ガウスはどのような方法で計算したのだろうか.

ガウス(1777–1855)

❷ 等差数列の和

ガウスの方法をまねて, 次の和を求めてみよう.

$3+5+7+9+11=\boxed{\ ?\ }$

一般的に次のことがいえる.

等差数列の和

初項 a の等差数列における第 n 項までの和 S_n は, 第 n 項（末項）を l とすると,

問題① 初項-2，末項43，項数10の等差数列の和S_{10}を求めよ．

例題❶ 次の等差数列の和を求めよ．

(1) 初項3，公差4，項数10の等差数列の和S_{10}を求めよ．

解

(2) 1, 3, 5, 7, 9, ... の初項から第n項までの和S_nを求めよ．

解

問題② 次の等差数列の和を求めよ．

(1) 初項3，公差5，項数10の等差数列の和S_{10}を求めよ．

(2) 1, 4, 7, 10, 13, ... の初項から第n項までの和S_nを求めよ．

(3) 13, 9, 5, 1, -3, ... の初項から第n項までの和S_nを求めよ．

年　　組　　番　氏名

$\boxed{3}$ 等比数列ってなに？

1 曾呂利新左衛門の話

豊臣秀吉のお伽衆（お抱え芸人）に曾呂利新佐衛門という人物がいた．彼は知恵者としていろいろな話が語り継がれている．その中に次のような話がある．

ある時，秀吉から褒美をもらえることになり，「褒美は何がよいか．」と聞かれ，新佐衛門は「米を

はじめの日は　1粒
2日目は　2粒
3日目は　4粒
⋮　⋮

と，前日の2倍にして，30日間いただきたい．」と答えた．秀吉は，そのようなことかと了承をしたが，何日かの後に新佐衛門に頭を下げて褒美を取り下げさせてもらったそうである．なぜ，秀吉は取り下げさせてもらったのだろうか．

2 等比数列

右表の米粒の数に現れる数列について考えてみよう．この数列は初項$\boxed{ア\quad}$に，$\boxed{イ\quad}$を次々に掛けていくことでできる．

このように，初項に一定の数を次々に掛けていってできる数列を$\boxed{ウ\qquad\qquad}$といい，掛けていく一定の数のことを$\boxed{エ\qquad}$という．

右表の米粒の数に現れる数列は「初項1，公比2の等比数列」といういい方をする．この数列の一般項を求めてみよう．この数列について次のことがいえる．

第2項を求めるには，初項1に公比2を$\boxed{オ\quad}$回掛ける．

第3項を求めるには，初項1に公比2を$\boxed{カ\quad}$回掛ける．

第4項を求めるには，初項1に公比2を$\boxed{キ\quad}$回掛ける．

⋮

第n項を求めるには，初項1に公比2を$\boxed{ク\quad}$回掛ける．

日	米粒の数
1	1
2	2
3	4
4	
5	
6	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
⋮	
29	
30	

※米粒1粒の重さを0.022 gとすると 30 日目の米粒の重さは約1.18 tとなる．

よって，一般項（第n項）は

ケ

一般的に次のことがいえる．

等比数列の一般項

初項a，公比rの等比数列の一般項a_nは，

例題❶ 等比数列 $1,\ -3,\ 9,\ -27,\ \ldots$ の一般項a_nを求めよ．

解

問題① 初項5，公比3の等比数列の一般項a_nを求めよ．

問題② 次の等比数列の公比と一般項を求めよ．

(1) $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ \ldots$

(2) $6,\ -2,\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{9},\ \ldots$

問題③ 次の問いに答えよ．

(1) 初項が3，第3項が48の等比数列の公比を求めよ．

(2) 公比が2，第5項が96の等比数列の初項を求めよ．

年　　組　　番　氏名

$\boxed{4}$ 等比数列を足そう

1 米粒の数の合計

曾呂利新左衛門が褒美を 30 日間もらい続けられたとすると，手に入れられる米粒の数の合計はいくつだろう．右表を見て，1 日目からn日目までの米粒の数の合計を予想してみよう．

日	米粒の数	米粒の数の合計	
1	1	1	2^1-1
2	2^1	3	2^2-1
3	2^2	7	2^3-1
4	2^3	15	2^4-1
5	2^4	31	2^5-1
6	2^5	63	2^6-1
⋮	⋮	⋮	⋮
n	2^{n-1}	?	
⋮	⋮	⋮	⋮
29	2^{28}	536870911	$2^{29}-1$
30	2^{29}	1073741823	$2^{30}-1$

$$1+2^1+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1}=\boxed{ア\qquad}$$

この予想が正しいかどうか，次の方法で確認してみよう．

$$S=1+2^1+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1}\quad\cdots\cdots①$$

とおく．この式の両辺を 2 倍して，

$$2S=\boxed{イ\qquad}\quad\cdots\cdots②$$

②－① より，

$$S=\boxed{ウ\qquad}$$

2 等比数列の和

上の方法をまねて，次の和を求めてみよう．

$$1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots+r^{n-1}=\boxed{\ ?\ }\qquad ただし，r\fallingdotseq 1$$

$$S=1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots+r^{n-1}\quad\cdots\cdots①$$

とおく．この式の両辺をr倍して，

$$rS=\boxed{エ\qquad}\quad\cdots\cdots②$$

②－① より，

$$(r-1)S=\boxed{オ\qquad}$$

よって，

$$S=1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots+r^{n-1}=\boxed{カ\qquad}$$

これをもとにすると，初項a，公比$r\ (r\fallingdotseq 1)$の等比数列の第n項までの和は，次のようにいえる．

等比数列の和

初項 a，公比 r $(r \neq 1)$ の等比数列における第 n 項までの和 S_n は,

証明.

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\cdots + ar^{n-1}$

$=$

終

例題❶　初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ.

解

問題①　初項 1，公比 3 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ.

問題②　次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ.

(1)　$3,\ -1,\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{9},\ \ldots$

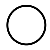
(2)　$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$

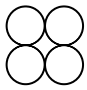
年　　組　　番　氏名

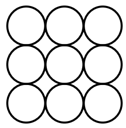
5 夏みかんは何個かな？

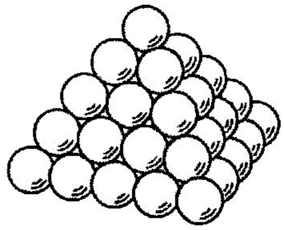
❶　積み上げられた夏みかん

果物屋の店頭に夏みかんが，次のような形で 5 段に積み上げられている．

1 段目には 1 個 

2 段目には 4 個 

3 段目には 9 個 



この夏みかんの個数 S_5 を求めてみよう．

$S_5=$ ア $\boxed{}$ ＝ イ $\boxed{}$

では，同じ形で 10 段まで夏みかんを積み上げたとしよう．このとき，夏みかんの個数 S_{10} はいくつだろうか．

$S_{10}=$ ウ $\boxed{}$ ……(＊)

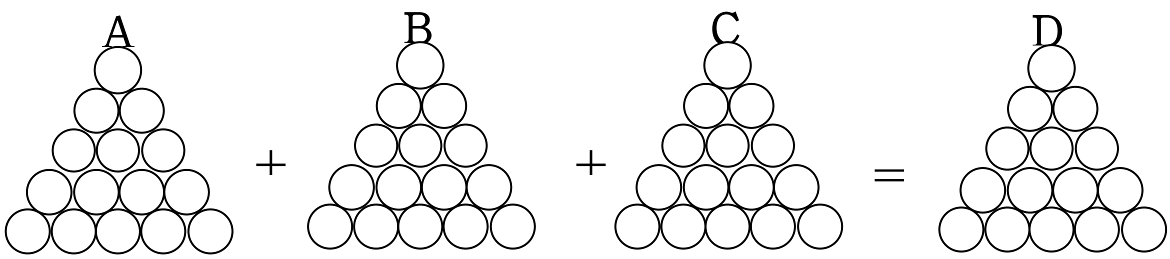
❷　10 段の夏みかん個数

上の空欄アの式は $S_5=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ と書き直せる．この計算が簡単にできる方法を考えよう．

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ は

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ 2+2 \\ 3+3+3 \\ 4+4+4+4 \\ 5+5+5+5+5 \\ \hline \end{array}$$

の和であることを利用して，次のように考える．下の○の中に数値を書き込もう．ただし，A は上，B は左下，C は右下から書き込む．



Dには［エ］が［オ］個あるので，Dの数値の合計は，

［カ］になるが，これは◯のピラミッド3つ分なのでピラミッド1つは

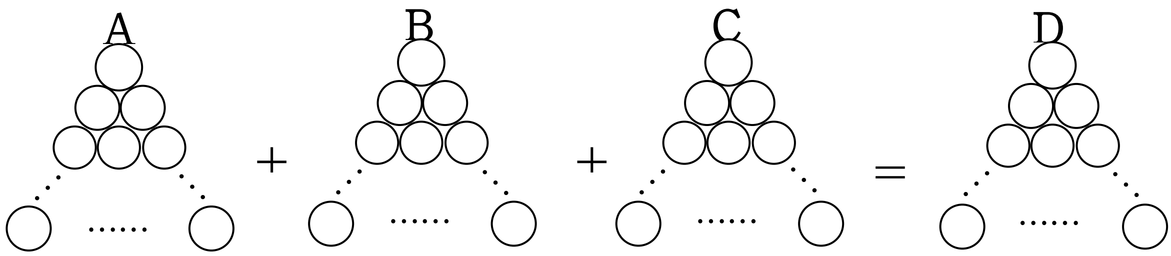
［ク］＝［ケ］

問題① この方法を使って，式(＊)の値（10段の夏みかんの個数）を求めよ．◯のピラミッドはプリントの裏に書くこと．

［コ］＝［サ］

3 自然数の平方の和

上で考えた方法を利用して$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$の和を求める公式を導いてみよう．



Dには［シ］が［ス］個あるので，Dの式の合計は，

［セ］になるが，これは◯のピラミッド3つ分なのでピラミッド1つは

［ソ］＝［タ］☞$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$を求める公式

例題❶ $1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$を求めよ．

解

問題② $11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2$を求めよ．✎注　上の公式に当てはめるだけではできない．

年　　組　　番　氏名

$\boxed{6}$ 正方形をつくる

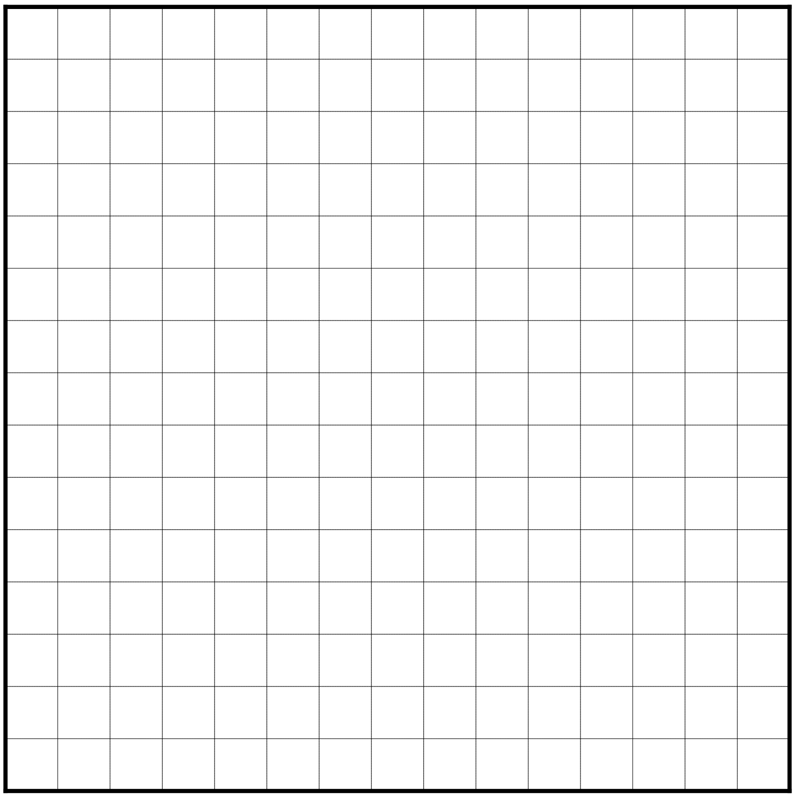
1　正方形のパズル

複数の正方形から 1 つの大きな正方形をつくることを考える.

1 辺が 1 cm の正方形　1 枚
1 辺が 2 cm の正方形　2 枚
1 辺が 3 cm の正方形　3 枚
1 辺が 4 cm の正方形　4 枚
1 辺が 5 cm の正方形　5 枚

で 1 辺が 15 cm の正方形をつくってみよう.

注　上の各正方形は，ハサミで切ってもよい.



ところで，・・・

1 辺が 1 cm の正方形の面積は

ア $\boxed{}$ cm^2

1 辺が 2 cm の正方形の面積は

イ $\boxed{}$ cm^2

1 辺が 3 cm の正方形の面積は

ウ $\boxed{}$ cm^2

1 辺が 4 cm の正方形の面積は

エ $\boxed{}$ cm^2

1 辺が 5 cm の正方形の面積は

オ $\boxed{}$ cm^2

各正方形の面積の合計は，

カ $\boxed{}$

注　例えば, 1 辺が 4 cm の正方形は 4 枚ある.

これは，上の結果から大きい正方形の面積と一致することが分かる．大きい正方形の 1 辺の長さは

キ $\boxed{}$

よって，次のことがいえる.

ク $\boxed{}$ ＝ ケ $\boxed{}$

＝ サ $\boxed{}$

2　自然数の立方の和

上で考えた方法を利用すると，

1 辺が 1 cm の正方形　1 枚
1 辺が 2 cm の正方形　2 枚
1 辺が 3 cm の正方形　3 枚
⋮
1 辺が n cm の正方形　n 枚

で 1 辺が $(1+2+3+\cdots+n)$cm の正方形をつくれる．

注　上の各正方形は，ハサミで切ってもよい．

すると，次のことがいえる．

シ $\boxed{}$ ＝ ス $\boxed{}$

＝ セ $\boxed{}$

☞ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ を求める公式

例題❶　$1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$ を求めよ．

解

問題①　次の和を求めよ．

(1)　$1^3+2^3+3^3+\cdots+100^3$

(2)　$2^3+4^3+6^3+\cdots+200^3$　**注**　上の公式に当てはめるだけではできない．

年　　組　　番　氏名

7 再び，夏みかんは何個かな？

1　積み上げられた夏みかん

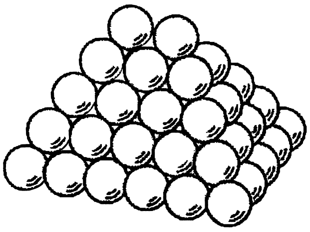
果物屋の店頭に夏みかんが，次のような形で5段に積み上げられている．

1段目には　$1\cdot2=2$ 個

2段目には　$2\cdot3=6$ 個

3段目には　$3\cdot4=12$ 個

⋮



この夏みかんの個数 S_5 を求めてみよう．

$S_5=$ ア［　　　　］＝ イ［　　　］

では，同じ形で10段まで夏みかんを積み上げたとしよう．このとき，夏みかんの個数 S_{10} はいくつだろうか．

$S_{10}=$ ウ［　　　　　　　　］　……(＊)

k 段目の夏みかんの個数は エ［　　　］＝ オ［　　　］個と表せるので，S_{10} は次のようにして求められる．

	k^2	＋	k
$k=1$：		＋	
$k=2$：		＋	
$k=3$：		＋	
$k=4$：		＋	
$k=5$：		＋	
$k=6$：		＋	
$k=7$：		＋	
$k=8$：		＋	
$k=9$：		＋	
$k=10$：		＋	
縦に合計		＋	

左の表より，S_{10} を求めるには，

カ［　　　　　　　　］

（自然数の平方の和）

と

キ［　　　　　　　　］

（自然数の和）

を求めて足せばよい．

（自然数の和）

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

（自然数の平方の和）

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

以上のことをまとめると，

ク［　　　　　　　　　　　　］

2　合計の記号

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ を記号を使って，次のように書き表す．

ケ

Σはギリシャ文字で「シグマ」と読み，ローマ文字のSに相当する．
合計を意味する英語の Sum に由来している記号である．

✎注　「k^2 に $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ を代入し，それらを加える」という意味

例題❶　次の和を，$\sum$ を使わないで表せ．

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k-1)=$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^{k-1}=$

問題①　次の和を，$\sum$ を使わないで表せ．

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(3k+1)$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2$

例題❷　次の和を，$\sum$ を使って表せ．

(1)　$1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=$

(2)　$1^2+3^2+5^2+\cdots+39^2$

参考
k を整数とするとき，
(i)偶数は　$2k$
(ii)奇数は　$2k-1$
と表せる

問題②　次の和を，$\sum$ を使って表せ．

(1)　$1\cdot4+2\cdot5+\cdots+n(n+3)$

(2)　$1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+\cdots+49\cdot51$

年　　組　　番　氏名

$\boxed{8}$ 合計の記号 Σ を使いこなそう

❶ 基本的な性質と公式

(i) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$　　(ii) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

(i) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=$

(ii) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=$

例　プリント「$\boxed{7}$ **再び，夏みかんは何個かな？**」に出てきた式

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+10\cdot11$$

を，$\sum$ を使って表すと，

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+10\cdot11=^{ア}\boxed{}$$

となるので，この値は

イ

(自然数の和)　$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

(自然数の平方の和)　$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(自然数の立方の和)　$\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

問題①　次の和を求めよ．

(1)　$\sum_{k=1}^{n}(5k+1)$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-2)$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k-1)$

問題② 次の和を求めよ．

(1)　$n \geqq 2$のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-3)$

問題③ 数列$1\cdot3,\ 2\cdot4,\ 3\cdot5,\ 4\cdot6,\ \cdots$の一般項を求めよ．また，初項から第$n$項までの和を求めよ．

問題④ 次の数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ．また，初項から第n項までの和を求めよ．

(1)　$1^2,\ 4^2,\ 7^2,\ 10^2,\ 13^2,\ \cdots$

(2)　$2\cdot3^2,\ 4\cdot4^2,\ 6\cdot5^2,\ 8\cdot6^2,\ 10\cdot7^2,\ \cdots$

(3)　$1,\ 1+2,\ 1+2+4,\ 1+2+4+8,\ 1+2+4+8+16,\ \cdots$

年　　組　　番　氏名

9 地下鉄の公式

1　階差数列

数列$\{a_n\}$の各項からそのすぐ前の項を引いた差による数列を$\{b_n\}$とする．数列$\{b_n\}$の 4 番目の空欄まで埋めてみよう．

a_n	1	3	7	13	21					
b_n										

数列$\{b_n\}$は

ア

と考えられる．

数列$\{b_n\}$の空欄の続きを埋めてみよう．

問題①　数列$\{a_n\}$と数列$\{b_n\}$の関係を推理して，数列$\{a_n\}$の第 10 項を求めてみよう．

一般に，数列$\{a_n\}$に対して，

各項からそのすぐ前の項を引いた差　$b_n = a_n - a_{n-1}$

を項とする数列$\{b_n\}$を数列$\{a_n\}$のイ　　　　　という．

例題❶　数列 3, 5, 9, 15, 23, ... の階差数列はどんな数列か．

解

問題①　数列 4, 6, 10, 18, 34, ... の階差数列はどんな数列か．

❷　階差数列と一般項

数列$\{a_n\}$の第 100 項を求めよう.

$a_{10}=$ ウ

であったので,

$a_{100}=$ エ

ここで，数列$\{b_n\}$は『初項2，公差2の等差数列』なので，$b_n=2n$となるから,

オ $=$ カ

よって，$a_{100}=$ キ $=$ ク $=$ ケ $=9901$

一般に，次のようにいえる.

階差数列と一般項

数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると，数列$\{a_n\}$の一般項a_nは

例題❷　数列5, 7, 11, 19, 35, ...の一般項a_nを求めよ.

解

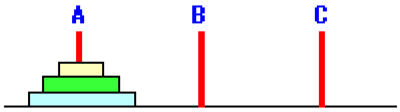
問題②　数列1, 4, 8, 13, 19, ...の一般項a_nを求めよ（解答は裏面に書くこと）.

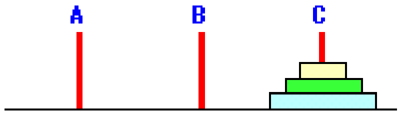
年　　組　　番　氏名

[10] ハノイの塔

1　世界の終末

　古くからあるパズルゲームに「ハノイの塔」と呼ばれるものがある．これは，右図のように棒に小さいものから大きいものへと積んである円板を，別の棒に移動するというゲームである．





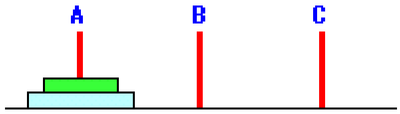
　ただし，次の３つのルールがある．

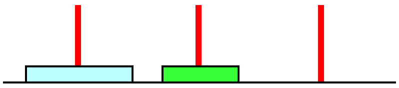
（１）　円板は，１回に１枚しか動かせない

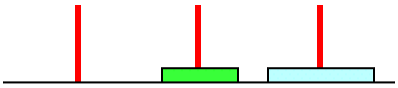
（２）　小さい円板の上に大きい円板をのせてはならない

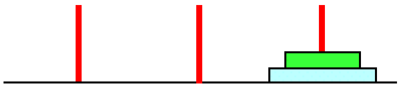
（３）　すべてを別の場所へ移し換える

　例えば，円板が２枚のときは下図のように３回の手順で移すことができる．









問 題①　円板が３枚のとき，最小何回の手順で移すことができるだろうか．

　さて，このゲームには昔から次のような伝説がある。

　インドにあるバラモン教の寺院には 64 枚の金でつくった円板があり，僧侶が円板を移し換えている．そして，64 枚が移し換えられたとき，この世が終わるのだという．

64 枚を移し換えるには，どのくらいの（最小）手順がいるのだろうか．

2　円板の数と最小手順

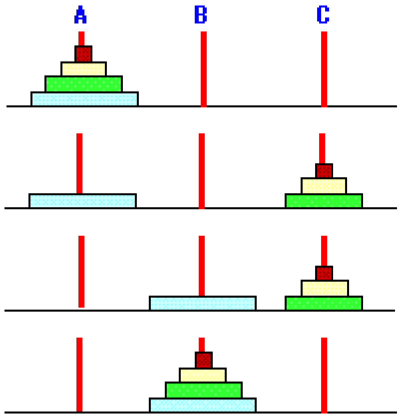
　円板の数を　n，　そのときの最小手順を　a_n

とする．n と a_n の関係を表にまとめてみよう．

n（枚数）	1	2	3	4	5	6	…
a_n（回数）							

考え方　円板が 4 枚の場合で考えてみよう．

4 枚を移すには，



（１）まず，3 枚を他の棒(C)に移す必要がある

（２）続いて，一番大きい円板を棒(B)に移す

（３）さらに，3 枚の円板を棒(B)に移す

という手順にすればよい．

つまり，次のことがいえる．

6 枚を移す手順の数＝ ア

上のことから，$n+1$ 枚の円板の場合には，次のようにいえる．

$n+1$ 枚を移す手順の数＝ イ ……(*)

3　漸化式

円板の数を　n，　そのときの最小手順を　a_n

としたとき，式(*)は次のように表せる．

a_{n+1} ＝ ウ

ハノイの塔の移動手順に関して，次のようにまとめることができる．

$$\begin{cases} a_1 = \boxed{\text{エ}} & \cdots\cdots① \\ a_{n+1} = \boxed{\text{オ}} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

このような数列の決め方を数列の カ という．また，式②のように

2 項間（a_n と a_{n+1}）の手続きを表す式を キ という．

年　　組　　番　氏名

11 漸化式から一般項へ

1 漸化式に慣れよう

初項と漸化式で決まる数列を考えよう.

例題❶ 次の初項と漸化式で決まる数列$\{a_n\}$の初項から第5項までを書け.

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=3a_n-2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

解

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

問題① 次の初項と漸化式で決まる数列$\{a_n\}$の初項から第5項までを書け.

(1) $a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n-1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

(2) $a_1=3,\quad a_{n+1}=a_n-2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

2　漸化式から一般項を求めてみよう

初項と漸化式で決まる数列の一般項を求めてみよう．

例題2　次の初項と漸化式で決まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ．

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=3a_n-2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

解

問題②　次の初項と漸化式で決まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ．

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+3\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

問題③　ハノイの塔の最小手順に関する数列は，次の初項と漸化式で決まった．一般項を求めてみよう（解答は裏面に書くこと）．

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+3\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

年　　組　　番　氏名

12 ドミノ倒し

1 数学的帰納法

数学の証明法に「ドミノ倒し論法」と呼べるような法方がある．その証明法を使って，次の問題を考えていこう．

例題1 次の漸化式で表される数列$\{a_n\}$がある．

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

一般項a_nを求めよ．

考え方　最初の何項かを求め，それから一般項を推定する．

解　$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\boxed{\text{ア}}$，$a_3=\boxed{\text{イ}}$，$a_4=\boxed{\text{ウ}}$

より，一般項a_nは次のように推定できる．

$$a_n=\boxed{\text{エ}}\quad\cdots\ (*)$$

用語解説
ここで使う証明法を「**数学的帰納法**」という．

この式が一般項である（すべての自然数nについて成り立つ）ことを，次のように証明する．

(i)　$n=1$のとき

$$（左辺）=a_1=\boxed{\text{オ}},\quad（右辺）=\boxed{\text{カ}}=\boxed{\text{キ}}$$

であるから，$(*)$が成り立つ．

(ii)　$n=k$のとき，$(*)$が成り立つと仮定し，$n=k+1$のときも成り立つことを示す．

$a_k=\boxed{\text{ク}}$が成り立つとすると，

$$a_{k+1}=\boxed{\text{ケ}}=\boxed{\text{コ}}=\boxed{\text{サ}}$$

よって，(i)，(ii)より，$(*)$はすべての自然数nについて成り立つ．　終

問 題①　次の漸化式で表される数列$\{a_n\}$について，各問いに答えよ．

(1)　a_2，a_3，a_4を求めよ．

(2)　一般項a_nを推定せよ．

(3)　(2)で推定した式が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(i)　$n=1$のとき

（左辺）$=a_1=$ $\boxed{シ}$，（右辺）$=$ $\boxed{ス}$ $=$ $\boxed{セ}$

であるから，(*)が成り立つ．

(ii)　$n=$ $\boxed{ソ}$ のとき，(*)が成り立つと仮定し，$n=$ $\boxed{タ}$ のときも成り立つことを示す．

$a_k=$ $\boxed{チ}$ が成り立つとすると，

$a_{k+1}=$ $\boxed{ツ}$ $=$ $\boxed{テ}$ $=$ $\boxed{ト}$

よって，(i)，(ii)より，(*)はすべての自然数nについて成り立つ．　終

例 題❷　数学的帰納法によって，次の等式が成り立つことを証明せよ（板書は裏面に写すこと）．

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

年　　組　　番　氏名