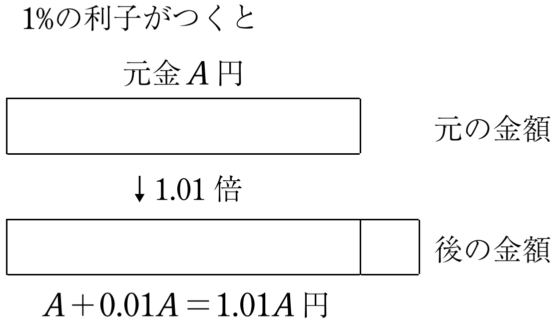
$\boxed{1}$ 1 日で 1% の利子がつくと

お金に困っていた英昭くんが, 知り合いから1日1%の利子で10万円を1年間借りることにした. 1年後の元利合計（元金と利子の合計）はいくらになるだろうか.

（1） 1日後の元利合計を求めよ.



（2） 2日後の元利合計を求めよ.

（3） 3日後の元利合計を求めよ.

（４）　x 日後の元利合計を表す式を求めよ．

初 め ：10 万円

1 日後：10 万円×$\boxed{}$

2 日後：10 万円×$\boxed{}$

3 日後：10 万円×$\boxed{}$

⋮　　　　　⋮

x 日後：10 万円×$\boxed{}$

（５）　1 年後（365 日後）の元利合計を求めよ．

（６）　x 日後の元利合計が，元金の y 倍になるとする． y を x を使った式で表せ．

参 考　実際には出資法第 5 条によって，1 日当たり 0.008%を超える利息をとってはいけないことになっている．

2 年　　組　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{2}$ 1時間で2倍に増えるバクテリア

ある種のバクテリアが10mgあって，分裂をくり返しながら増えている．このバクテリアの増え方について，次のことが言える．

① 切れ目なく連続的に変化する．

② いつでも，一定時間たてば，それに応じて一定倍になる．

① については，大量のバクテリアがあるので，どの瞬間をとってもどれかの個体が分裂していると考えていいので，イメージとして「切れ目なく連続的に増える」と考えてよい．

② は，どの時間から始めても，かかった時間が同じ x 時間ならば，バクテリアの量は x 倍だけ増えるということである．

増えるのに必要な空間と養分が与えられれば，バクテリアはこの理想的な法則に近い形で増えていく．いま，**1時間で2倍に増えるバクテリア**を考える．x 時間後のバクテリアの量を表す式を求めよう．

最初10mgあったバクテリアは

1時間後：10mg×$\boxed{}$

2時間後：10mg×$\boxed{}$

3時間後：10mg×$\boxed{}$

⋮　　　　⋮

x 時間後：10mg×$\boxed{}$

となっていく．

いま，x 時間後のバクテリアの量が，最初のバクテリアの量の y 倍になるとする．このとき，y を x を使った式で表すと，

$$y=\boxed{}$$

となる．この式やプリント「$\boxed{1}$ **1日で1%の利子がつくと**」の（6）で求めた式で得られる変化の法則が，これから学んでいく『**指数関数**』である．

一般的に，指数関数は次のように表される．

指数関数

$0 < a < 1$，$1 < a$ のとき，

$$y = a^x$$

で表される関数を，**底を a とする指数関数**という．

$\boxed{\text{例 題}}$ ある湖の水は，1m 深くなるごとに光の透過する強さ，すなわち明るさが $\dfrac{1}{2}$ 倍になっていくという．

$$1\text{m}：\frac{1}{2}$$

$$2\text{m}：\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$3\text{m}：\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\vdots$$

いま，x m の深さでの明るさが，水面上での明るさの y 倍になるとする．このとき，y を x を使った式で表すと，

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

となる．

これは，底を $\dfrac{1}{2}$ とする指数関数である．

2年　　組　　番　氏名

3 3時前のバクテリア

プリント「2 **1時間で2倍に増えるバクテリア**」で考えたバクテリアは，x時間後で最初のy倍になるとすると，

$$y = 2^x$$

となる．このバクテリアについて，次のことを考えてみよう．

観察を始めたとき，バクテリアは10mgあった（これを基準量と呼ぶことにする）．1時間後には基準量の2^1倍，2時間後には基準量の2^2倍，3時間後には基準量の2^3倍，・・・と増えていった．このとき，3時間前には基準量の何倍のバクテリアがあったであろうか．

➡**注**　1時間前を-1，2時間前を-2，3時間前を-3，・・・と負の数で表すことにする．

	4時間前	3時間前	2時間前	1時間前	基準	1時間後	2時間後	3時間後	4時間後
	(　)	(　)	(　)	(　)	(　)	(　)	(　)	(　)	(　)
量									
倍									
2^x									

問 題　上の結果から，次の値がどのようであればよいだろうか．

（1）　$2^{-3} = \boxed{} = \boxed{}$

（2）　$2^{-2} = \boxed{} = \boxed{}$

（3）　$2^{-1} = \boxed{} = \boxed{}$

（4）　$2^{0} = \boxed{}$

一般に，負の数乗と0乗を次のように定める．

指数の拡張 1

$a \neq 0$，$n > 0$のとき，

（1）　$a^{-n} = \boxed{}$

（2）　$a^{0} = \boxed{}$

例 題　次の値を求める.

（1）　$2^{-5} =$

（2）　$3^{-1} =$

（3）　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} =$

（4）　$(-5)^{-3} =$

（5）　$100^{0} =$

問 題　次の値を求めよ.

（1）　$3^{-5} =$

（2）　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} =$

（3）　$(-10)^{-2} =$

（4）　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} =$

（5）　$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{0} =$

2 年　　組　　番　氏名

$\boxed{4}$ 30 分後のバクテリア

プリント「$\boxed{2}$ **1 時間で 2 倍に増えるバクテリア**」で考えたバクテリアは，x 時間後で最初の y 倍になるとすると，

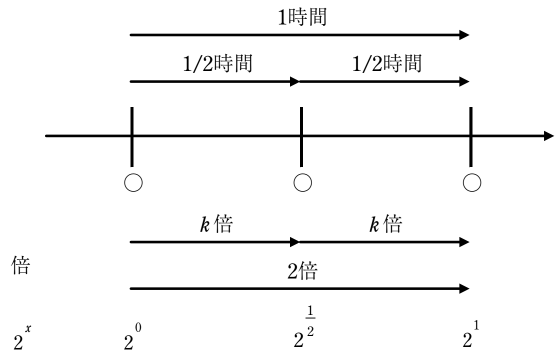
$$y = 2^x$$

となる．このバクテリアについて，次のことを考えてみよう．

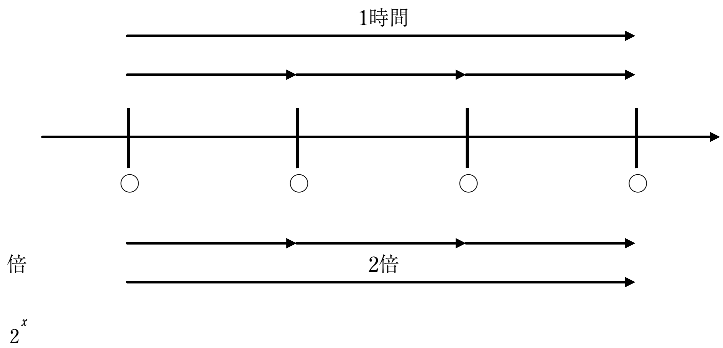
観察を始めたときの，バクテリアの量を基準量と呼ぶことにする．このバクテリアは 1 時間後に基準量の 2^1 倍に増えるが，30 分後では基準量の何倍であろうか．

➡**注**　30 分を $\dfrac{1}{2}$ 時間，20 分を $\dfrac{1}{3}$ 時間，･･･と分数で表すことにする．

バクテリアは 30 分後に基準量の $2^{\frac{1}{2}}$ 倍になるが，$2^{\frac{1}{2}}$ とはどのような値なのだろうか．考えてみよう．



このバクテリアは 20 分後に基準量の何倍になるだろうか．



一般に，分数乗を次のように定める．

指数の拡張 2

$a>0$，$n>0$ のとき，

$a^{\frac{1}{n}}=\boxed{}$ ⋯ n 乗すると a になる数

例題 次の値を求める．

（1） $8^{\frac{1}{3}}\cdots\boxed{}$ 乗すると $\boxed{}$ になる数であるから，$8^{\frac{1}{3}}=\boxed{}$

（2） $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}\cdots\boxed{}$ 乗すると $\boxed{}$ になる数であるから，$\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}=\boxed{}$

問題 次の値を求めよ．

（1） $9^{\frac{1}{2}}=$

（2） $125^{\frac{1}{3}}=$

（3） $243^{\frac{1}{5}}=$

（4） $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=$

2年　　組　　番　氏名

$\boxed{5}$ 急激な変化

プリント「$\boxed{2}$ **1 時間で 2 倍に増えるバクテリア**」で考えたバクテリアは，x 時間後で最初の y 倍になるとすると，

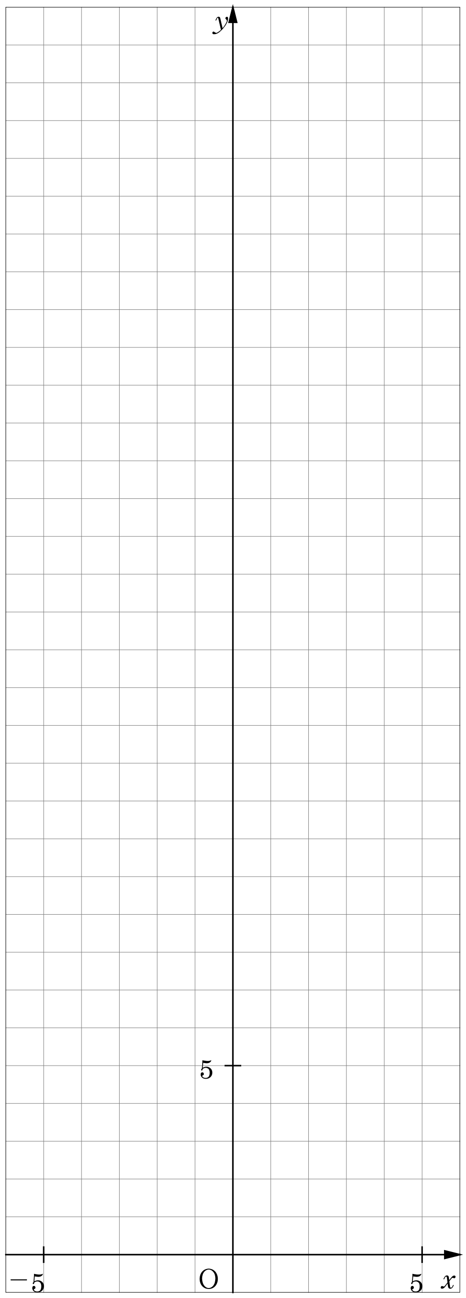
$$y = 2^x$$

となる．これは，底が 2 の指数関数である．この指数関数がどのような変化をするのか，グラフにして見てみよう．

対応表

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y									

グラフ



指数関数 $y = 2^x$ のグラフを見ると，次のことが分かる．

① 定義域：$\boxed{\quad\quad}$

値　域：$\boxed{\quad\quad}$

② グラフは点 $\boxed{\quad\quad}$ を通る．

③ x の値が $\boxed{\quad\quad}$ するとき，y の値も $\boxed{\quad\quad}$ する．

$\boxed{\text{用語解説}}$ 指数関数 $y = 2^x$ のグラフは x 軸に限りなく近づく．このとき，x 軸をグラフの**漸近線**という．

$\boxed{\text{問 題}}$ 指数関数 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ について，対応表を完成し，グラフをかけ．また，グラフを見て，① ～ ③ の文の空欄を埋めよ．

対応表

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y									

① 定義域：$\boxed{\quad\quad}$

値　域：$\boxed{\qquad\qquad}$

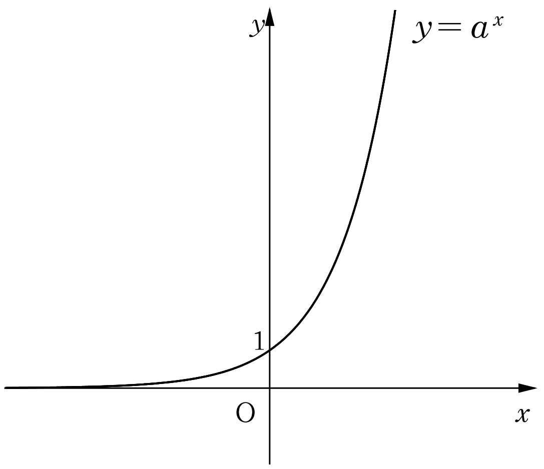
② グラフは点 $\boxed{\qquad\quad}$ を通る.

③ x の値が $\boxed{\qquad}$ するとき，y の値も $\boxed{\qquad}$ する.

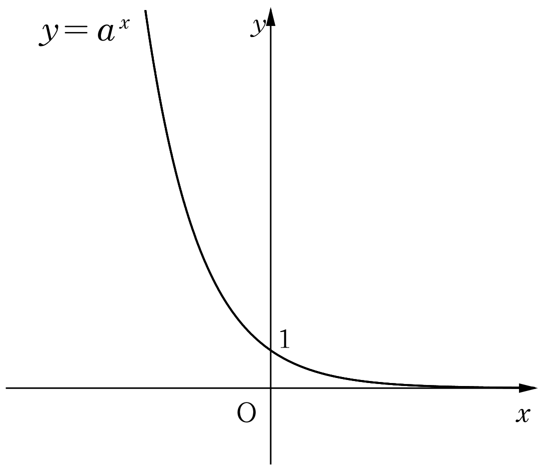
一般に，次のことが言える.

指数関数のグラフと性質 ❶

$\boxed{\qquad\qquad}$ のとき



$\boxed{\qquad\qquad}$ のとき



① 定義域：$\boxed{\qquad\quad}$　　値域：$\boxed{\qquad\qquad}$

② グラフは点 $\boxed{\qquad\quad}$ を通る.

③ x の値が $\boxed{\qquad}$ するとき，

y の値も $\boxed{\qquad}$ する.

③ x の値が $\boxed{\qquad}$ するとき，

y の値も $\boxed{\qquad}$ する.

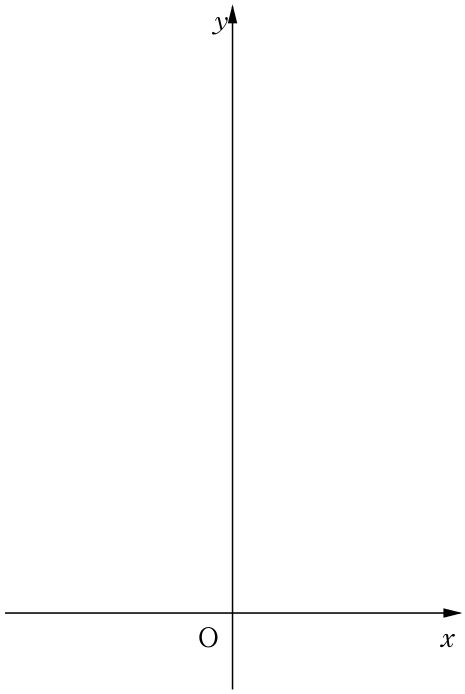
④ グラフの漸近線は $\boxed{\quad}$ である.

2年　　組　　番　氏名

$\boxed{6}$ どちらが大きい？

プリント「$\boxed{5}$ **急激な変化**」で学んだ指数関数のグラフの応用を考える.

$\fbox{問 題}$ 指数関数 $y=3^x$ と $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ のグラフをかけ.



いま, $3^{\frac{1}{4}}$ と 9 の大小を比較する. $9=3^2$ であることを考えて, 大小を予想してみよう.

予想： $3^{\frac{1}{4}}$ $\boxed{\phantom{<}}$ 9

理由： $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

予想の結果が正しいかどうかをグラフを使って確かめてみよう.

$3^{\frac{1}{4}}$ と 3^2 を指数関数 $y=3^x$ の x にそれぞれ $\dfrac{1}{4}$ と 2 を代入したものである. したがって, グラフより

$$\frac{1}{4}\ \boxed{\phantom{<}}\ 2 \iff 3^{\frac{1}{4}}\ \boxed{\phantom{<}}\ 3^2$$

となることが分かる.

$\fbox{問 題}$ $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ と $\dfrac{1}{9}$ の大小を次のように考えて判断した.

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ と $\dfrac{1}{9}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ を指数関数 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ の x にそれぞれ $\dfrac{1}{4}$ と 2 を代入したものである.

したがって,

$$\frac{1}{4}<2 \text{ であるから, } \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}<\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

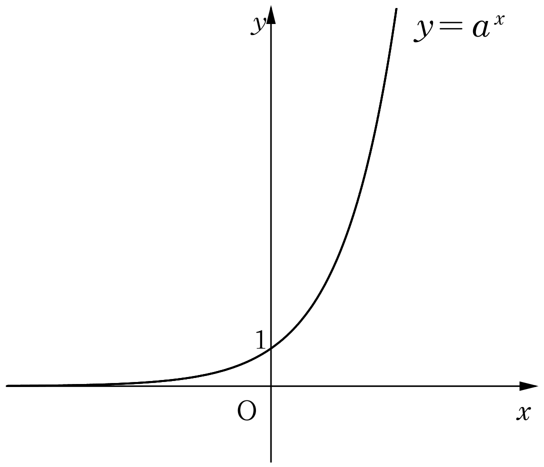
となる.

この考え方には誤りがある. その誤りを訂正せよ.

一般に，次のことが言える．

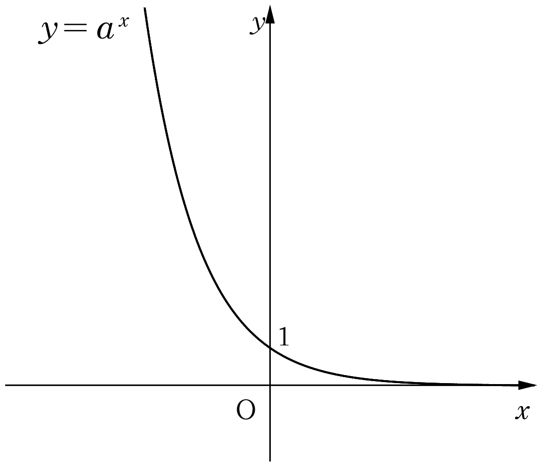
指数関数のグラフと性質 ❷

$\boxed{\qquad\qquad}$ のとき



⑤　$p \ \boxed{\quad} \ q \iff a^p \ \boxed{\quad} \ a^q$

$\boxed{\qquad\qquad}$ のとき



⑤　$p \ \boxed{\quad} \ q \iff a^p \ \boxed{\quad} \ a^q$

例 題　不等式 $3^{\frac{x}{2}} < 9$ を満たす x の値の範囲を求める．

$9 = 3^2$ であるから，与式は

$\boxed{\qquad\qquad}$

となる．指数関数 $y = 3^x$ の底は $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ ので

$\boxed{\qquad\qquad}$

$\therefore x < 4$．

問 題　次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ．

（1）　$2^x > \dfrac{1}{8}$

（2）　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} \leqq 27$

2年　　組　　番　氏名

7 3乗すると2になる数

プリント「3 **30分後のバクテリア**」で $a^{\frac{1}{n}}$ という数を考えた．これは「n 乗すると a になる数」のことであった．例えば，

$$2^{\frac{1}{3}} \text{ は } \boxed{} \text{ 乗すると } \boxed{} \text{ になる数}$$

のことである．この数のことを

$$\boxed{}$$

と表し，3の $\boxed{}$ という．

一般に，次のように定める．

累乗根

n 乗すると a になる数を $\boxed{}$ と表し，a の $\boxed{}$ という．

➡**注** ① 上の定義によると2乗すると a になる数は $\sqrt[2]{a}$ となるが，ふつう $\sqrt{a}$ と書く．

② $a>0$ のとき，$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ と定める．

例題 次の値を求める．

（1） $\sqrt[3]{125}\cdots$ $\boxed{}$ 乗すると $\boxed{}$ になる数であるから，$\sqrt[3]{125}=\boxed{}$

（2） $\sqrt[5]{-32}\cdots$ $\boxed{}$ 乗すると $\boxed{}$ になる数であるから，$\sqrt[5]{-32}=\boxed{}$

（3） 81の4乗根$\cdots$ $\boxed{}$ 乗すると $\boxed{}$ になる数であるから，$\boxed{}$ と $\boxed{}$

問題 次の値を求めよ．

（1） $\sqrt[4]{625}=$

（2） $\sqrt[5]{-243}=$

（3） $\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}}=$

（4） $\dfrac{1}{256}$ の8乗根

累乗根の積と商

$a>0$，$b>0$，n：正の整数のとき

（1）　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\boxed{}$　　　（2）　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\boxed{}$

➡**注**　n 乗根の種類が同じでなければ成り立たない.

例題　次の計算をする.

（1）　$\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}=\boxed{}=\boxed{}$

（2）　$\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}=\boxed{}=\boxed{}$

（3）　$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{5}=\boxed{}$

（4）　$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{6}=\boxed{}=\boxed{}=\boxed{}=\boxed{}$

問題　次の計算をせよ.

（1）　$\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}=$

（2）　$\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}=$

（3）　$\sqrt[5]{4}\times\sqrt[5]{6}=$

（4）　$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{10}=$

2年　　組　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{8}$ 指数法則

累乗の指数には，次の指数法則が成り立つ．

指数法則

$a>0$，$b>0$ で，$x,\ y$：実数のとき

① $a^x a^y = \boxed{}$　　② $a^x \div a^y = \boxed{}$

③ $\left(a^x\right)^y = \boxed{}$

④ $(ab)^x = \boxed{}$　　⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \boxed{}$

➡**注** $\boldsymbol{a>0}$ のとき，$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ と定める．

例 題　次の計算をする．

（１）　$a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} = \boxed{} = \boxed{}$　(指数法則：①)

（２）　$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^5} = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$　(指数法則：③，①)

（３）　$\sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$　(指数法則：③)

（４）　$8^{\frac{2}{3}} = \boxed{} = \boxed{}$　(指数法則：③)

問 題　次の計算をせよ．

（１）　$a^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{4}{3}} =$

（２）　$\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[4]{a^5} =$

（３）　$\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} =$

（４）　$25^{\frac{2}{3}} =$

例 題　$\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 \times 2^{-\frac{1}{3}}$ 計算をする.

考え方　底を 2 にして，かける数とかけられる数を 2^x の形で表す.

解　$\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 \times 2^{-\frac{1}{3}} =$

問 題　$\left(\sqrt[5]{2}\right)^2 \times \sqrt[5]{8}$ を計算せよ.

解　$\left(\sqrt[5]{2}\right)^2 \times \sqrt[5]{8} =$

例 題　$\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{4}$ の大小を比較せよ.

考え方　底を 2 にして，2 つの数を 2^x の形で表す.

解　$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$ である．ここで，

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

であり，底の 2 は 1 より大きいので（参 考　プリント「$\boxed{6}$ **どちらが大きい？**」）

$$2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{2}{3}}$$

となる．よって，

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$$

問 題　$\sqrt[3]{9}$ と $\sqrt[4]{27}$ の大小を比較せよ.

解

2 年　　組　　番　氏名