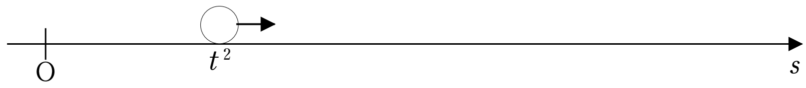
[0] 速度と変位

1 速度

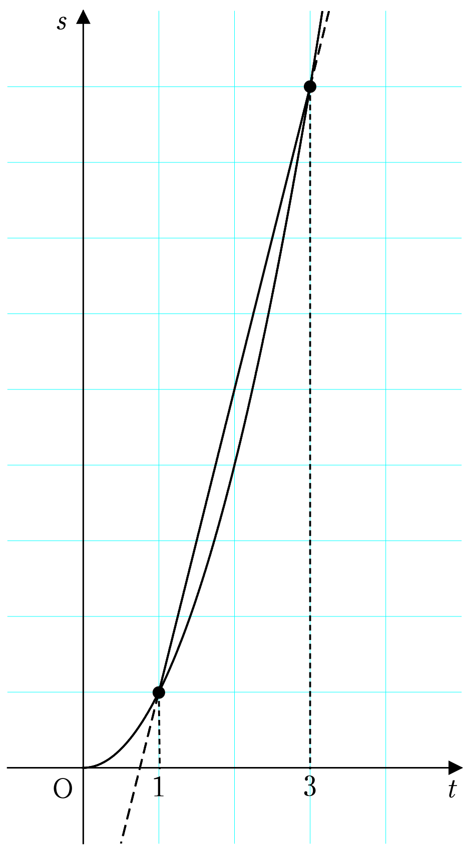
動き始めてからt秒後の位置s mが次の式で表せる物体があったとしよう.

$$s=t^2$$



問題① 動き始めてから1秒後から3秒後の間の物体の平均の速度を求めよう.

この物体の位置を表す式$s=t^2$を$s-t$グラフで表すと右図のようになる. また, 問題①で求めた平均の速度は図中の2点を結ぶ直線の傾きを表している. つまり,



平均の速度

↓

2点を結ぶ直線の傾き

自動車に乗っているときのことを考えると分かるように, 自動車はずっと一定の速度で走っているわけではない. この物体にしても1秒後から3秒後の間, 問題①で求めた平均の速度でずっと動いているわけではない. その名が示すように1秒後から3秒後の間の速度の平均を求めているだけである.

では, 動き始めてから1秒後, まさにその瞬間の速度はどのようにして求めればよいのだろうか. また, $s-t$グラフで考えたとき, 瞬間の速度は何を表しているのだろうか.

動き始めてから1秒後の瞬間の速度を求められるようにしよう!
s-tグラフで考えたとき, 瞬間の速度は何を表しているかを知ろう!

2　変位

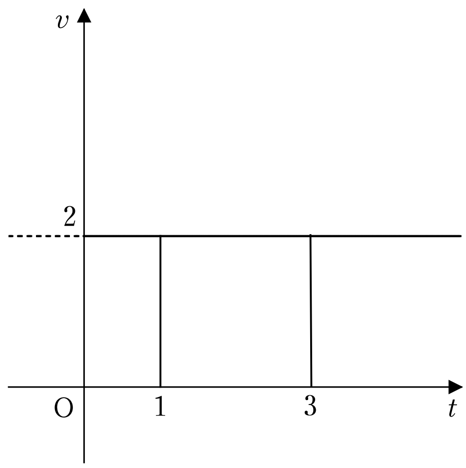
動き始めてからt秒後の速度v m/s が次の式で表せる物体があったとしよう．

$$v = 2$$

✎注　等速直線運動をしている物体である．

問 題②　動き始めてから 1 秒後から 3 秒後の間の物体の位置の変化量（変位）を求めよう．

この物体の位置を表す式$v = 2$を$v-t$グラフで表すと右図のようになる．また，問 題②で求めた変位は図中の斜線部分の面積を表している．つまり，



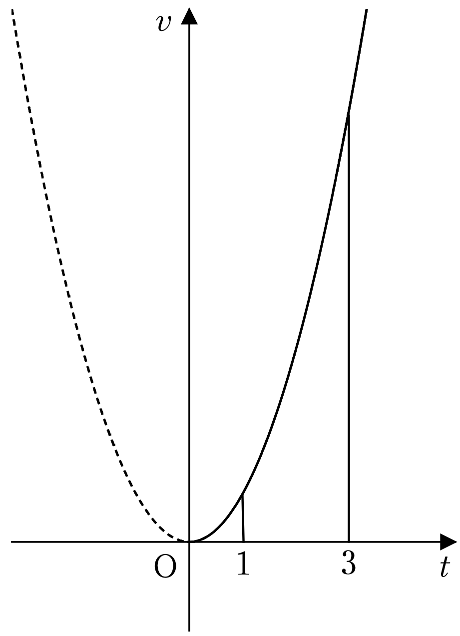
物体の位置の変化量（変位）

↓

グラフで囲まれた面積

自動車に乗っているときのことを考えると分かるが，この物体のように速度が 2 m/s と一定で動くこと現実的にはない．

例えば，動き始めてからt秒後の速度v m/s が$v = 3t^2$で表せる物体があったとしよう．この式の$v-t$グラフは右図のようになる．



この物体の 1 秒後から 3 秒後の間の変位は，図中の斜線部分の面積となる．この斜線部分は曲線で囲まれている．どのようにしたら，その面積を求めることができるだろうか．

⚠$v-t$ グラフで囲まれた斜線部分の面積（変位）を求められるようにしよう！

微分・積分を使えば，物理で学ぶ速度などの公式も自分で導けるようになる!!

2 年　　組　　番　氏名

$\boxed{1}$ 平均変化率

1　関数 $f(x)$

x の関数 y を表す式を $f(x)$ とか $g(x)$ などと書き，x に数 a を代入して計算した $f(x)$ の値を $f(a)$ で表す．

例 題❶　2 次関数 $f(x)=x^2$ において，$x=2$ のときの値 $f(2)$ を求めよ．

解　$f(2)=$

問 題①　2 次関数 $f(x)=x^2$ において，次の値を求めよ．

(1)　$f(-3)$

(2)　$f(2+h)$

2　平均変化率

2 次関数 $f(x)=x^2$ において，次の値を求めよう．

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=$$

この値を x が 1 から 2 まで変わるときの関数 $f(x)$ の ア $\boxed{}$ という．

例 題❷　関数 $f(x)=x^2$ について，x が a から b まで変わるときの平均変化率を求めよ．

解　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=$

問 題②　関数 $f(x)=x^2+3x$ について，x が a から b まで変わるときの平均変化率を求めよ．

例 題❸　関数 $f(x)=x^2$ について，x が 2 から $2+h$ まで変わるとき平均変化率を求めよ．

解　$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}=$

問題③　関数 $f(x)=x^2+3x$ について，次のときの平均値変化率を求めよ．

(1)　x が 1 から $1+h$ まで変わるとき

(2)　x が a から $a+h$ まで変わるとき

3　平均変化率の図形的意味

x が 1 から 2 まで変わるときの関数 $f(x)=x^2$ の平均変化率は，$f(x)=x^2$ のグラフ上の点 $(1, f(1))$ と点 $(2, f(2))$ を通る $\boxed{イ\quad}$ を表しており，$\boxed{ウ\quad}$ である．

問題④　関数 $f(x)=x^2$ において，x が 0 から 1 まで変わるときの平均変化率はどのような直線の傾きであると考えられるか．

関数 $f(x)=x^2$ のグラフ上の

点 $\boxed{エ\quad}$

と

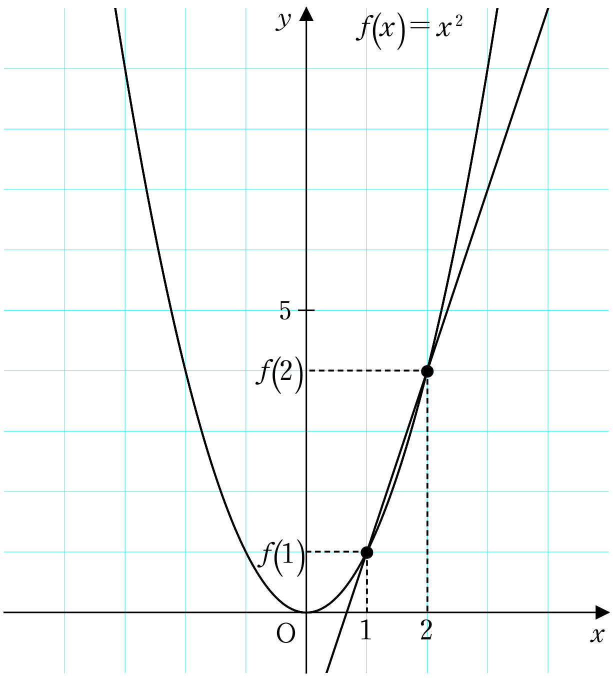
点 $\boxed{オ\quad}$

を通る直線の傾きである．

また，その傾きを求めると

$\boxed{カ\quad}$

となる．



2 微分係数

復習 2次関数 $f(x)=x^2$ において，x が1から $1+h$ まで変わるときの平均変化率を求めよ．

1 極限値

h の値を限りなく0に近づけると，$2+h$ の値は ア に限りなく近づく．この値を h が限りなく0に近づくときの イ という．

また，このことを記号で次のように書く．

ウ

例題1 極限値 $\lim_{h\to 0}(4+h)$ を求めよ．

解 $\lim_{h\to 0}(4+h)=$

問題1 次の極限値を求めよ．

(1) $\lim_{h\to 0}(-6-3h)$　　(2) $\lim_{h\to 0}\left(3+3h+h^2\right)$

2 微分係数

関数 $f(x)$ の x が a から $a+h$ まで変わるときの平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

注　分母は $(a+h)-a$ の計算結果

となる．この平均変化率において，h を限りなく0に近づけるときの極限値が定まるとしよう．このとき，その極限値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における エ といい，記号 オ で表す．

注　微分係数を変化率ともいう．

つまり，極限の記号を使って表すと次のようになる．

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

注　$x=a$ における微分係数の定義

例題2 関数 $f(x)=x^2$ の $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ を求めよ．

解 $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=$

問 題② 関数 $f(x)=x^2+3x$ について，次の微分係数を求めよ．

✎注　**No.1** の 問 題③ の結果を利用

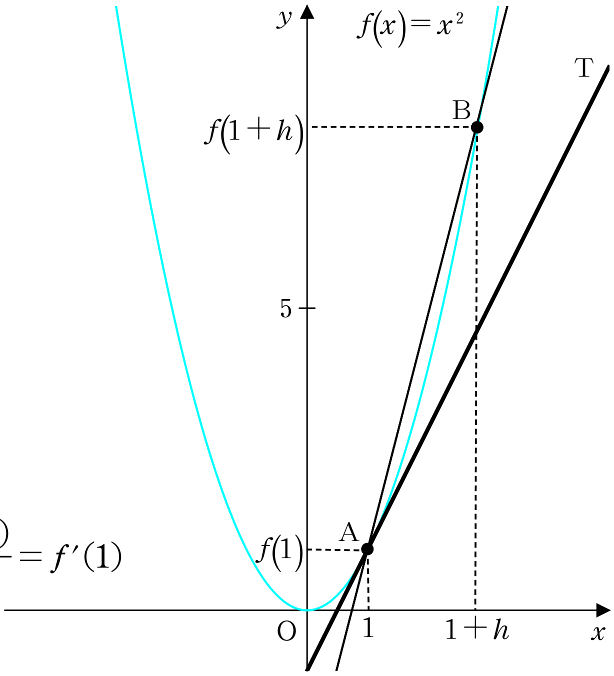
(1)　$f'(1)$

(2)　$f'(a)$

3　微分係数の図形的意味

関数 $f(x)=x^2$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(1, f(1))$ と点 $\mathrm{B}(1+h, f(1+h))$ を考える．いま，h を限りなく 0 に近づけてみよう．すると，点 B はグラフ上を動いて点 A に限りなく近づいていく．

このとき，次の図式を考えてみよう．



h を限りなく 0 に近づけるとき

$$\text{直線AB} \xrightarrow{\text{限りなく近づく}} \text{直線AT}$$

↓傾き　　　　↑傾き

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \xrightarrow{h\to 0} \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

つまり，微分係数 $f'(1)$ は直線 AT の傾きを表している．この直線 AT を点 A における曲線 $f(x)=x^2$ の カ［　　　］といい，点 A を キ［　　　］という．

例 題❸ 放物線 $f(x)=x^2$ 上の点 $(2, 4)$ における接線の傾きを求めよ．

解　$f'(2)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=$

問 題③ 放物線 $f(x)=x^2+3x$ 上の点 $(-2, -2)$ における接線の傾きを求めよ．

✎注　**No.2** の 問 題② (2) の結果を利用

2年　　組　　番　氏名

$\boxed{3}$ 導関数

復習 関数 $f(x)=x^2$ について，次の微分係数を求めよ．

(1) $f'(-2)$

(2) $f'(x)$

1 導関数

上の**復習**の (2) で得られた式について，次のことを考えてみよう．

$x=-2$ を代入する．すなわち，$f'(-2)=$

➾注 これは，**復習**の (1) の結果と一致している．

一般に，$f'(x)=2x$ の x に a を代入すると $x=a$ における微分係数 $f'(a)=2a$ が得られる．

例 関数 $f(x)=x^2$ の微分係数 $f'(2)$ は，$f'(x)=2x$ の x に 2 を代入して求められる．

$f'(2)=2\cdot 2=4$ ➾注 $f'(2)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$

この $f'(x)=2x$ を関数 $f(x)=x^2$ の ア $\boxed{}$ といい，導関数 $f'(x)$ を求めることを，関数 $f(x)$ を イ $\boxed{}$ という．

一般に，導関数は極限の記号を使って次のように表す．

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{or} \quad f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

➾注 導関数の定義

参考 関数 $y=f(x)$ の導関数を表すのに次の記号も使われる．

$$\frac{d}{dx}f(x) \qquad y' \qquad \frac{dy}{dx}$$

2 導関数を求める公式

公式❶ 関数 $f(x)=x^n$ の導関数は $\boldsymbol{f'(x)=nx^{n-1}}$ $\left(n=1,\ 2,\ 3,\ \dots\right)$

証明

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{x^n+nx^{n-1}h+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots+h^n-x^n\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{nx^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right\}=nx^{n-1}.$$

終

例題❶　関数 $f(x)=x^5$ を微分せよ.

解　$f'(x)=$

公式❷　関数 $f(x)=kx^n$ の導関数は　$\boldsymbol{f'(x)=k\cdot nx^{n-1}}$　$(k:$定数, $n=1, 2, 3, \ldots)$

証明

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{k(x+h)^2-kx^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{k}{h}\left\{x^n+nx^{n-1}h+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots+h^n-x^n\right\}$$

$$=k\lim_{h\to0}\left\{nx^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right\}=knx^{n-1}.$$

終

例題❷　関数 $f(x)=5x^2$ を微分せよ.

解　$f'(x)=$

公式❸　定数関数 $f(x)=c$ の導関数は　$\boldsymbol{f'(x)=0}$　$(c$:定数$)$

証明

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to0}0=0.$$

終

関数 $y=sf(x)+tg(x)$ の導関数は,

$$y'=sf'(x)+tg'(x)$$

となる.

証明

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{\{sf(x+h)+tg(x+h)\}-\{sf(x)+tg(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{sf(x+h)+tg(x+h)-sf(x)-tg(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{sf(x+h)-sf(x)+tg(x+h)-tg(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{sf(x+h)-sf(x)}{h}+\frac{tg(x+h)-tg(x)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{s\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+t\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}s\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}t\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=sf'(x)+tg'(x).$$

終

例題❸　関数 $y=-6$ を微分せよ.

解　$y'=$

2　導関数の計算

公式❶, 公式❷, 公式❸を使って項ごとに微分する.

例題❹　関数 $y=2x^3+3x^2-5x+2$ を微分せよ.

解　$y'=$

問題①　次の関数を微分せよ.

(1)　$y=-2x+3$　　(2)　$y=-3x^2+x+4$

(3)　$y=5x^3-8x+1$　　(4)　$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+1$

(5)　$y=-4x^3+6x^2+7x-9$

2年　　組　　番　氏名

4 導関数の利用

復習 関数 $y=2x^2-5x-3$ を微分せよ．

1 関数の微分

因数分解された式の場合は，展開してから項ごとに微分する．

例題1 関数 $y=(2x+1)(x-3)$ を微分せよ．

解 $y=(2x+1)(x-3)=$

となるので

$y'=$

問題① 次の関数を微分せよ．

(1) $y=(x+5)(3x-1)$

(2) $y=(2x+3)^2$

(3) $y=x(x+1)^2$

(4) $y=(x-1)^3$

2 微分係数と導関数

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ に値を代入することで微分係数を求めることができる．

$$\boxed{\text{関数 } f(x)} \xrightarrow{\text{微分する}} \boxed{\text{ア}\qquad\qquad} \xrightarrow{x=a\text{ を代入する}} \boxed{\text{イ}\qquad\qquad}$$

問題② 関数 $f(x)=x^2+3x$ について，微分係数 $f'(-2)$ を求めよ．

問題③ 関数 $f(x)=x^3+x^2-ax+1$ について，$f'(1)=7$ となる a の値を求めよ．

3 接線の方程式

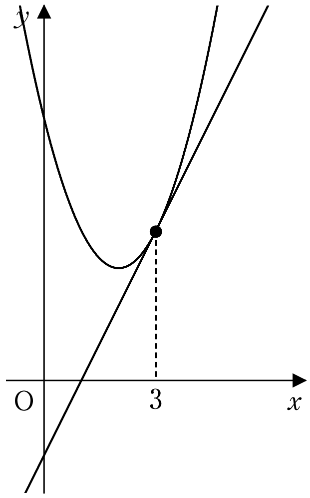
関数 $f(x)$ のグラフ上の点 $(a\ ,\ b)$ における**接線の傾きは，微分係数 $f'(a)$** に等しい．

このことを利用すると，グラフ上の点における接線の方程式を求めることができる．

例題❷　$f(x)=x^2+3x$ のグラフ上の x 座標が -2 である点における接線の方程式を求めよ．

解

参考
点 $\left(a\,,\ f(a)\right)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は
$$y-f(a)=m(x-a)$$



問題④　関数 $f(x)=x^2-4x+7$ のグラフ上の x 座標が 3 である点における接線の方程式を求めよ．

例題❸　曲線 $y=x^2-3x+6$ のグラフに点C(1，0)から引いた接線の方程式を求めよ．

解

問題⑤　曲線 $y=-x^2+2x$ について，傾きが 4 の接線の方程式を求めよ．

2年　　組　　番　氏名

$\boxed{5}$ 接線と曲線

復習 関数 $f(x)=x^3-3x$ のグラフ上の点 $(2, 2)$ における接線の方程式を求めよ．

1 接線と曲線

曲線 $f(x)=x^3-3x$ について，次の点における接線の傾きを求めてみよう．

点 $(-2, -2)$・・・接線の傾き：ア

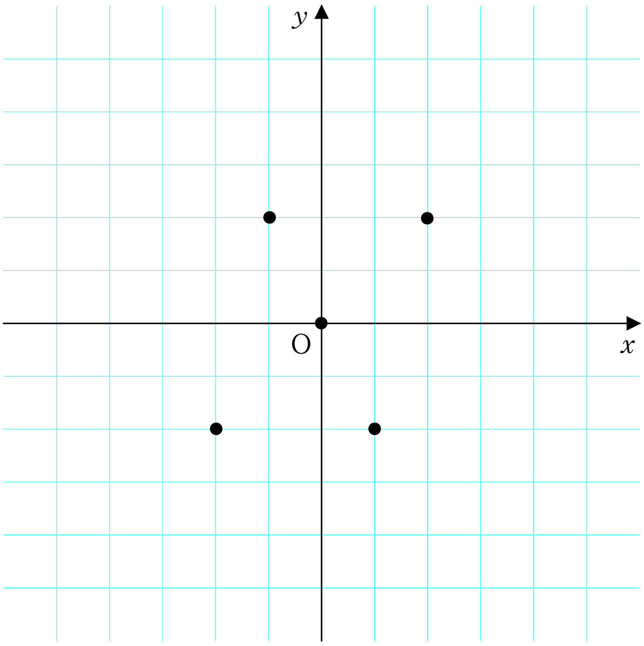
点 $(-1, 2)$・・・接線の傾き：イ

点 $(0, 0)$・・・接線の傾き：ウ

点 $(1, -2)$・・・接線の傾き：エ

点 $(2, 2)$・・・接線の傾き：オ

上の各点における接線を，その傾きが分かる程度に図示ししてみよう．



上の図では, 直線が5本引かれているが, それらの直線が接する曲線（関数 $f(x)=x^3-3x$ のグラフ）がどのような形になるかの想像がつくだろう．

2 接線が描く曲線

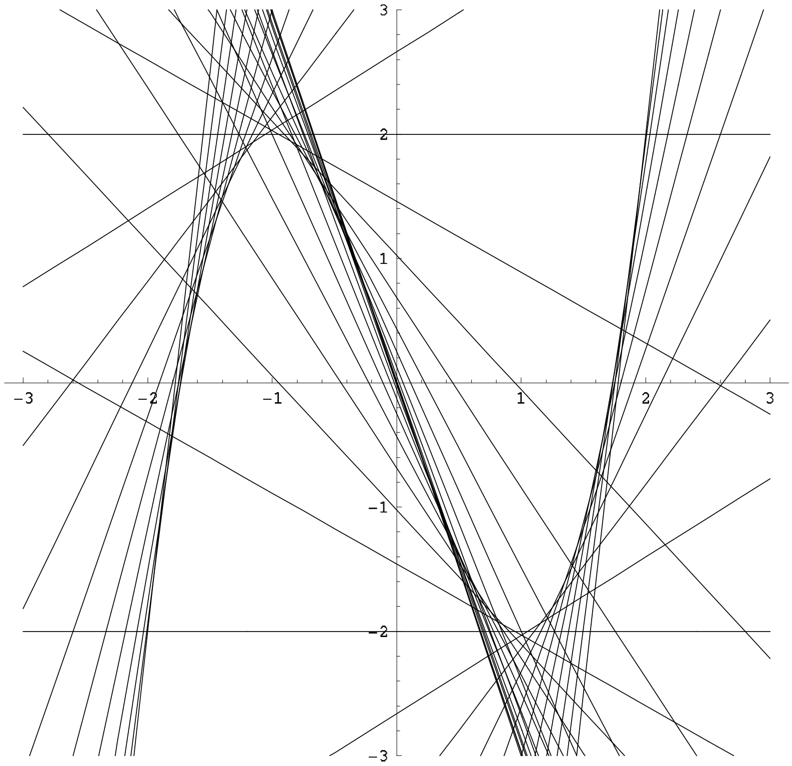
接線を引く点の数を細かくとれば，よりハッキリと曲線の形が見えてくる．次の図は，接点の x 座標を -2 から 2 まで 0.1 刻みに変化させたときの接線を図示したものである．41個の点

$(-2\,,\,f(-2))$，$(-1.9\,,\,f(-1.9))$，$(-1.8\,,\,f(-1.8))$，$\cdots$，

$\cdots$，$(0\,,\,0)$，$\cdots$，

$\cdots$，$(1.8\,,\,f(1.8))$，$(1.9\,,\,f(1.9))$，$(2\,,\,f(2))$

のそれぞれにおける接線が引いてある．



上の図は，よりハッキリと曲線（関数 $f(x)=x^3-3x$ のグラフ）を想像することができるだろう．グラフそのものがかいてあるといってもよいくらいである．しかし，注意して見て欲しい．図には曲線を表す線は一切かかれていない．41 本の接線がかかれているだけである！

上の図のように関数の各点における接線を引くことができれば，関数のグラフがどのようになるか分からずとも，その変化の様子を知ることができる．各点における接線の方程式は x の 1 次式なので，x の 1 次関数となっている．つまり，図は関数 $f(x)=x^3-3x$ のグラフ（曲線）を各点において 1 次関数のグラフ（直線）で近似していることになる．この

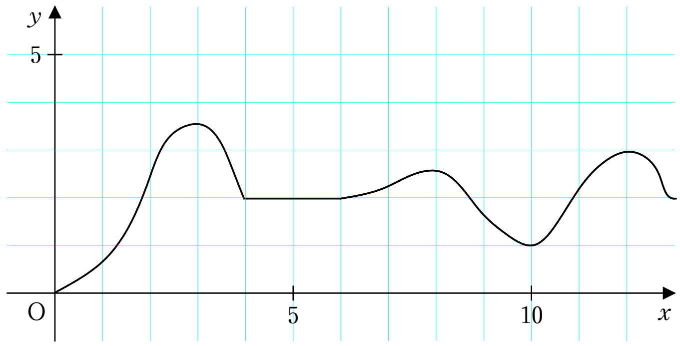
関数の 1 次関数での近似（曲線の直線での近似）

が『**微分**』の考え方である．

2 年　　組　　番　氏名

6 関数の増減

考察 右の図は，ハイキングコースの様子を示したものである．x 軸がスタート地点からの移動距離，y 軸がスタート地点からの高さを表している．次の区間を求めよう．



(1)　上り坂の区間はどこか．

(2)　下り坂の区間はどこか．

1　関数の増加・減少

考察 での結果は，一般的に次のようにいえる．

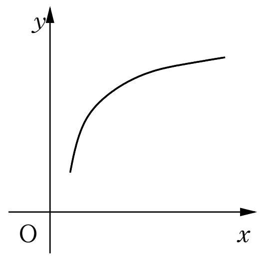
導関数の符号と関数の増加・減少

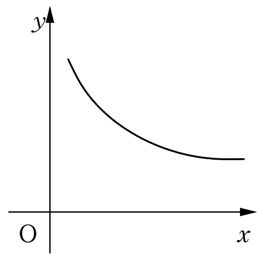
関数 $f'(x)$ が x のある範囲で

(1)　ア［　　　］ $\Longrightarrow$ $f(x)$ は イ［　　　］

(2)　ウ［　　　］ $\Longrightarrow$ $f(x)$ は エ［　　　］

(3)　オ［　　　］ $\Longrightarrow$ $f(x)$ は カ［　　　］





例題1　関数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ について，増減を調べよ．

解

参考

2 次不等式の解法

$k>0$，$\alpha<\beta$ とする．

(i)　$k(x-\alpha)(x-\beta)>0$ のとき
$x<\alpha,\quad \beta<x$

(ii)　$k(x-\alpha)(x-\beta)<0$ のとき
$\alpha<x<\beta$

上の **例 題❶**の結果を表にすると, 次のようになる.　✎**注**　このような表を増減表という.

x					
$f'(x)$					
$f(x)$					

問 題①　関数 $f(x)=6x^2-x^3$ について，増減を調べよ.

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$					
$f(x)$					

2　グラフのかき方

例 題❷　関数 $f(x)=6x^2-x^3$ について，増減を調べ，そのグラフをかけ.

解

問 題②　関数 $f(x)=x^4-2x^2$ の増減を調べ，そのグラフをかけ.

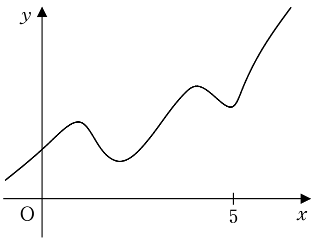
2 年　　組　　番　氏名

7 関数の値の変化

復習 関数 $f(x)=x^3-3x-1$ の増減を調べ，そのグラフをかけ.

1 関数の極大・極小

考察 右の図において，山頂と谷底はどこだろうか.



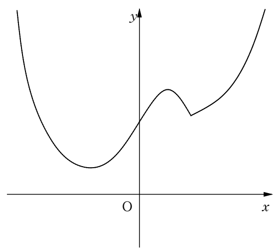
関数の極大・極小

関数 $f(x)$ が

(1) $x=\alpha$ を境にして $\boxed{\text{ア}\qquad}$ から $\boxed{\text{イ}\qquad}$ に移るとき，

$f(x)$ は $x=\alpha$ で $\boxed{\text{ウ}\qquad\qquad}$

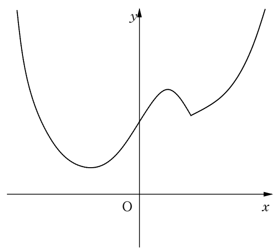
といい，関数の値 $f(\alpha)$ を $\boxed{\text{エ}\qquad}$ という.



(2) $x=\beta$ を境にして $\boxed{\text{オ}\qquad}$ から $\boxed{\text{カ}\qquad}$ に移るとき，

$f(x)$ は $x=\beta$ で $\boxed{\text{キ}\qquad\qquad}$

といい，関数の値 $f(\beta)$ を $\boxed{\text{ク}\qquad}$ という.



注 関数が極大または極小となるからといって，その点で関数が微分可能であるとはいえない.

注 極大値と極小値をまとめて関数の極値という.

問 題①　関数 $f(x)=x^3-3x-1$ が極値をもつか調べ，もつ場合はその値を求めよ.

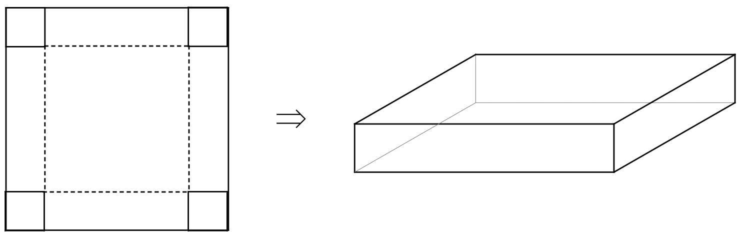
2　関数の最大・最小

例 題❶　関数 $f(x)=x^3-3x-1$ の区間 $-2\leqq x\leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ.

解

問 題②　関数 $f(x)=-2x^3-5x^2+4x+2$ の区間 $-3\leqq x\leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ.

問 題③　1 辺の長さが 18 cm の正方形の紙がある．この 4 隅から正方形切り取り，その残りを折り曲げてふたのない箱をつくる.



この箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さをいくらにすればよいか.

➾注　解答は裏面へ

2 年　　組　　番　氏名

8 関数のグラフの応用

復習 関数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ の増減を調べ，そのグラフをかけ.

1 方程式への応用

例題1 方程式 $x^3-3x^2+2=0$ の異なる実数解の個数を求めよ.

解

問題① 方程式 $x^4-4x^3-2x^2+12x+4=0$ の異なる実数解の個数を求めよ.

例題❷　方程式$x^3-3x^2-a=0$がただ1個の実数解をもつように定数aの値の範囲を定めよ.

解

2　不等式への応用

例題❷　$x \geqq 0$のとき，不等式$3x^2-4 \leqq x^3$が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つときのxの値を求めよ.

証明

問題②　$x \geqq 0$のとき，不等式$2x^3+\dfrac{1}{27} \geqq x^2$が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つときのxの値を求めよ.

注　証明は裏面へ

2年　　組　　番　氏名

9 不定積分

考察 次の関数のうち，微分すると関数$2x$となるものはどれか.

① x^2+7　② x^2+x　③ $-x^2+2$　④ $5+x^2$　⑤ $3x^2$

1 原始関数

上の**考察**の答えとなる関数は，いずれも関数$2x$を微分した関数である．一般に，

$$F'(x)=f(x)$$

となるとき，関数$F(x)$を関数$f(x)$の ア［　　　　］ という.

注　つまり，微分して$f(x)$となる関数のことである.

2 不定積分

関数$2x$の原始関数はいずれも イ［　　　　］ の形に表すことができる．一般に，関数$f(x)$の原始関数は ウ［　　　　］ と表せる．これを次の記号 エ［　　　　］ で表し，関数$f(x)$の オ［　　　　］ という．すなわち，

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C \quad (C：積分定数)$$

関数$f(x)$の不定積分を求めることを，$f(x)$を カ［　　　　］ という.

例　関数$2x$の不定積分は次のように表す.

$$\int 2x\,dx=x^2+C \quad (C：積分定数)$$

3 不定積分を求める公式

公式❶　関数x^nの不定積分は　$\displaystyle\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$

例題❶　不定積分$\displaystyle\int x^4\,dx$を求めよ.

解　$\displaystyle\int x^4\,dx=$

参考
導関数を求める公式❶
$f(x)=x^n$の導関数は
$f'(x)=nx^{n-1}$

問題①　不定積分$\displaystyle\int x^5\,dx$を求めよ.

公式❷　関数 kx^n の不定積分は　$\displaystyle\int \boldsymbol{kx^n\,dx = k\times\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C}$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

例題❷　不定積分 $\displaystyle\int 5x^2\,dx$ を求めよ.

解　$\displaystyle\int 5x^2\,dx=$

> 参考
> **導関数を求める公式❷**
> $f(x)=kx^n$ の導関数は
> $f'(x)=k\cdot nx^{n-1}$

問題②　不定積分 $\displaystyle\int 6x^2\,dx$ を求めよ.

4　不定積分の計算

多項式関数の場合は，**公式❶**，**公式❷**を使って項別に積分する.

例題❸　不定積分 $\displaystyle\int (3x^2-6x+2)\,dx$ を求めよ.

解　$\displaystyle\int (3x^2-6x+2)\,dx=$

問題③　不定積分 $\displaystyle\int (x^2-4x-3)\,dx$ を求めよ.

因数分解された形の場合は，展開してから項別に積分する.

例題❹　不定積分 $\displaystyle\int (x+2)^2\,dx$ を求めよ.

解　$\displaystyle\int (x+2)^2\,dx=$

問題④　不定積分 $\displaystyle\int (4x+1)(3x-2)\,dx$ を求めよ.

例題❷　条件 $F'(x)=3x^2-6x+2$，$F(1)=5$ をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ.

解

問題⑤　条件 $F'(x)=x^2-4x-3$，$F(3)=-5$ をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ.

➩**注**　解答は裏面へ

2年　　組　　番　氏名

10 定積分

復習 不定積分$\int(3x^3+2x-1)dx$を求めよ．

1 定積分

関数$F(x)$が$f(x)$の原始関数であるとする．すなわち，$F'(x)=f(x)$である．このとき，$F(b)-F(a)$で得られる値を

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

で表し，関数$f(x)$のaからbまでの ア $\boxed{}$ という．

例題❶ 関数$f(x)=3x^2+2x-1$の1から2までの定積分を求めよ．

解

✎注 定積分を求めるときは，積分定数Cをつける必要はない．

問題① 次の定積分を求めよ．

(1) $\int_0^2 4x\,dx=$

(2) $\int_1^2(4x-6x^2)dx=$

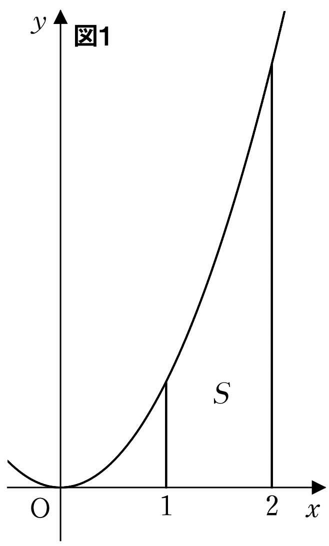
(3) $\int_{-1}^1(2x^2+x)dx=$

2 定積分の意味

関数$f(x)=x^2$のグラフとx軸，$x=1$，$x=2$で囲まれた部分の面積S（図1）を求めてみよう．そのために，図2のような面積を表す関数$F(x)$を考える．すると，

$$S=\text{ア}\boxed{}$$

となるので，$F(x)$を表す式が分かればSを求めることができる．



そこで，$F(x)$を表す式を求めることを考えよう．

関数$F(x)$に対して，図3のような状況を考える．このとき，

$s_1 =$ イ

$s_2 =$ ウ

$s_3 =$ エ

となるが，図3よりあきらかに$s_2 < s_1 < s_3$であるから，

オ

両辺をhで割って

カ

この式でhを限りなく 0 に近づけると，左辺と右辺はx^2に近づくので

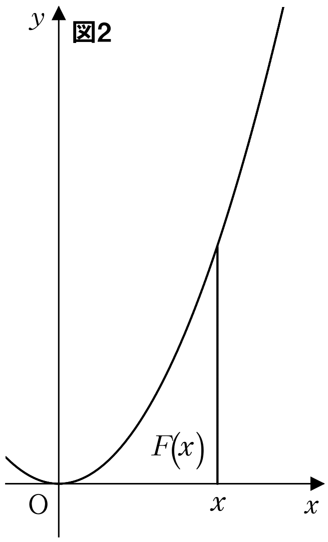
キ

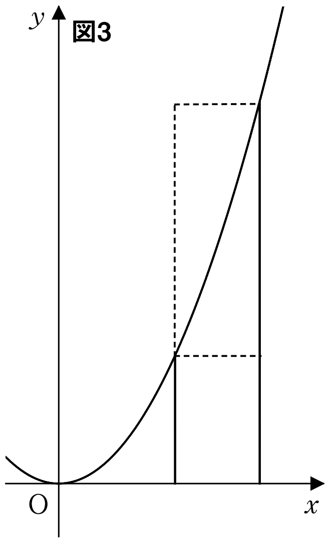
が成り立つ．すなわち，$F(x)$は微分するとx^2になる関数である．

したがって，$F(x)$の式の1つとして，

$F(x) =$ ク　とすると，$S =$ ケ

以上のことは，次のように定積分の記号を使って表すことができる．

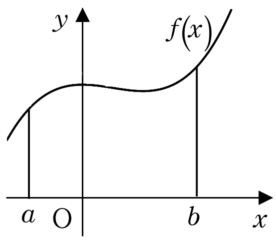




一般に，関数$f(x)$のグラフとx軸，$x=a$，$x=b$で囲まれた部分（右図の斜線部分）の面積は，次の式で求められる．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

ただし，$F(x)$は$f(x)$の原始関数である．



2年　　組　　番　氏名

11 定積分と面積

復習 定積分$\displaystyle\int_0^1 \left(-x^2+x\right)dx$を求めよ.

1 グラフとx軸で囲まれた部分の面積

例題❶ 関数$f(x)=x^2+2$のグラフとx軸，$x=-1$，$x=3$で囲まれた部分の面積を求めよ.

解

問題① 関数$f(x)=2x^2+1$のグラフとx軸，$x=-1$，$x=3$で囲まれた部分の面積を求めよ.

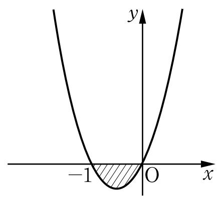
例題❷ 関数$f(x)=-x^2+x$のグラフとx軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

考え方　グラフとx軸との交点のx座標を求める.

解

例題❸ 関数$f(x)=x^2+x$のグラフとx軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

考え方　囲まれた部分で$f(x)\leqq 0$のときは$-f(x)$のグラフを考える.



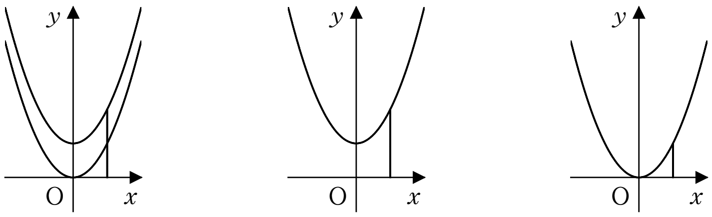
解

問 題②　関数 $f(x)=(x-1)(x-3)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

2　曲線間の面積（１）

例 題④　関数 $f(x)=x^2$，$g(x)=x^2+1$ のグラフと $x=0$，$x=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

考え方　求める面積を次のように２つの図形の面積の差として考える．



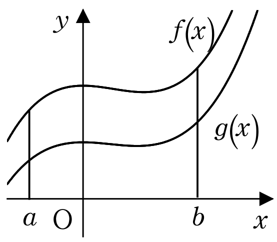
注　$\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$ が成り立つことを使う．

解

区間 $a\leqq x\leqq b$ において $f(x)\geqq g(x)$ のとき，右図の斜線部分の面積は

$$\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

となる．



問 題③　関数 $f(x)=-x^2$，$g(x)=-x^2+4$ のグラフと $x=-2$，$x=2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

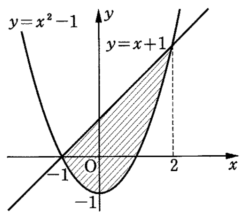
2年　　組　　番　氏名

12 定積分の性質

復習 関数 $f(x)=x^2+1$ のグラフと x 軸，$x=0$，$x=1$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

1 曲線間の面積（２）

例題❶ 関数 $f(x)=x^2-1$ のグラフと関数 $g(x)=x+1$ のグラフとで囲まれた図形の面積を求めよ.



考え方 2つのグラフの交点の x 座標を求める.

解

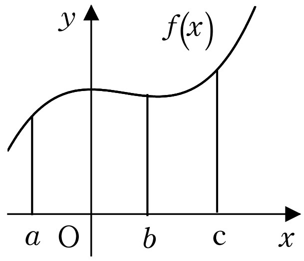
問題① 関数 $f(x)=-x^2+3x+4$ のグラフと関数 $g(x)=-x+7$ のグラフとで囲まれた図形の面積を求めよ.

2　定積分の性質

性質❶　$\displaystyle \int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

性質❷　$\displaystyle \int_a^a f(x)dx=0$

性質❸　$\displaystyle \int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$



注　面積に関してだけではなく，一般の定積分の計算に関しても成り立つ.

例題❷　次の定積分を求めよ.

(1)　$\displaystyle \int_1^3 x^2\,dx+\int_3^1 x^2\,dx=$

(2)　$\displaystyle \int_{-2}^0 2x\,dx+\int_0^2 2x\,dx=$

(3)　$\displaystyle \int_0^{-1}(x^2+x)\,dx=$

問題②　定積分$\displaystyle \int_{-3}^{-1}(2x^2+3)\,dx+\int_{-3}^{-1}(-2x^2-3)\,dx$を求めよ.

例題❸　定積分$\displaystyle \int_0^2 \left|x^2+x-2\right|dx$を求めよ.

考え方　**性質❶**を使って場合分けをして，被積分関数の絶対値記号を外す.

解

問題③　定積分$\displaystyle \int_{-2}^2 \left|x^2-1\right|dx$を求めよ.

注　解答は裏面へ

2年　　組　　番　氏名