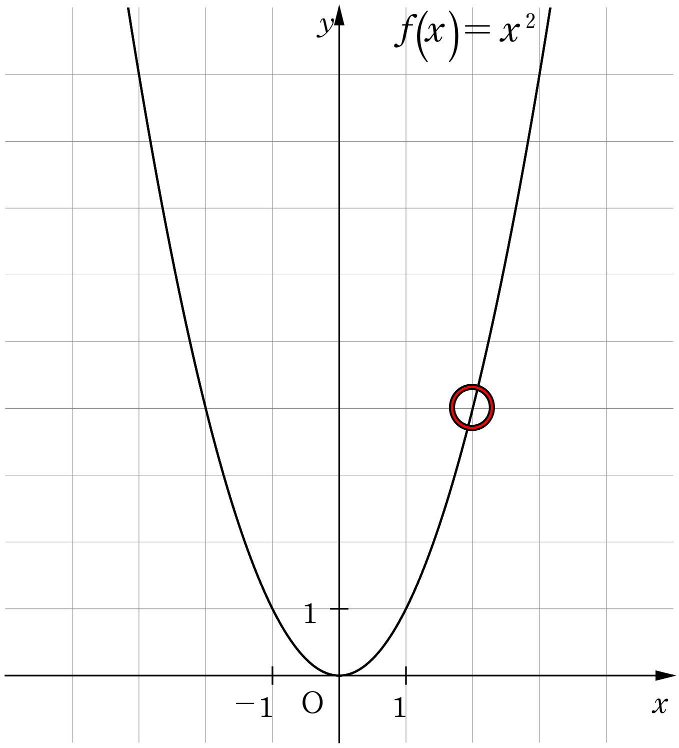
$\boxed{1}$ 曲線？　直線？

❶　接線の方程式

次の図は関数 $f(x)=x^2$ のグラフである．点$(2, 4)$を中心とするごく狭い区間でこのグラフを見てみよう．どのような図形に見えるだろうか？



点$(2, 4)$を通る直線に見えるのではないだろうか？　この直線を左右に延長したものが，関数 $f(x)=x^2$ のグラフ上の点$(2, 4)$における接線である．そして，この接線の傾きが $f(x)$ の $x=2$ における微分係数 $f'(2)$ に等しい．

この接線の方程式を求めてみよう．その前にちょっと復習を･･･．

> **直線の方程式 II**
>
> 点(a, b)を通り，傾きが m の直線の方程式は
>
> $$y-b=m(x-a)$$

例題❶　関数 $f(x)=x^2$ の点$(2, 4)$における接線の傾きを求めてみよう．

考え方　関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め，接点の x 座標を代入する．

解　$f'(x)=$ ア $\boxed{}$ であるから，$f'(2)=$ イ $\boxed{}$．

よって，求める接線の傾きは イ $\boxed{}$ となる．

問題①　関数 $f(x)=x^2$ の点$(2, 4)$における接線の方程式を求めよ．

考え方　上の **直線の方程式 II** を利用する．

解

接線の方程式

関数 $f(x)$ のグラフ上の点$(a, f(a))$における接線の方程式は，

演習　教科書　**p.94　練習 1**　をノートに解答せよ.

2　法線の方程式

関数 $f(x)=x^2$ のグラフ上の点 $(2, 4)$ を通り，点 $(2, 4)$ における接線と垂直な直線（これを ウ［　　］ という）の方程式を求めてみよう．その前にちょっと復習を・・・．

垂直に交わる直線の傾き II

傾きが m の直線と傾きが m' の直線が垂直に交わるとき

$$mm'=-1$$

例題 2　関数 $f(x)=x^2$ の点 $(2, 4)$ における法線の傾きを求めてみよう．

考え方　上の**垂直に交わる直線の傾き** II を利用する．

解　求める法線の傾きを m とする．

点 $(2, 4)$ における接線の傾きは $f'(2)$ であるから，

$f'(2)\cdot m=$ エ［　　］.

$\therefore m=$ オ［　　］.

よって，求める法線の傾きは カ［　　］ となる．

問題 ②　関数 $f(x)=x^2$ の点 $(2, 4)$ における法線の方程式を求めよ．

考え方　上の **直線の方程式** II を利用する．

解

法線の方程式

関数 $f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ における法線の方程式は，

演習　教科書　**p.97　練習 4**　をノートに解答せよ.

⇨注　解答し終わって余裕がある場合は　問題集　**p.42　基本 90**　をノートに解答せよ．

3 年　　組　　番　氏名

$\boxed{2}$ 瞬間の速度

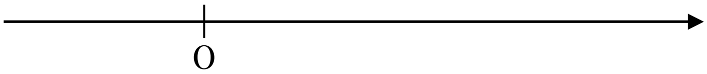
1　平均速度

数直線上を運動する点 P について考えよう．時刻 t によって点 P の座標 x は変化するので，x は t の関数である．そこで，

$$x = f(t)$$

と表すことにする．

いま，時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ まで点 P が動いたとしよう．



時刻　t　における点 P の座標 ･･･ ア[　　　]

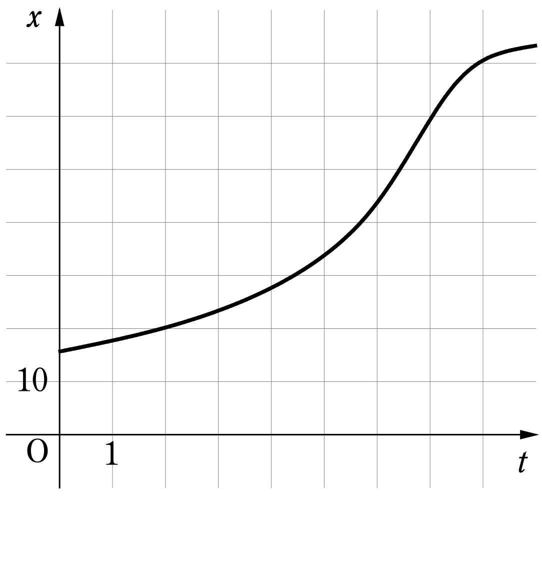
時候　$t+\Delta t$　における点 P の座標 ･･･ イ[　　　]

このとき，

$$\frac{\boxed{\text{イ}\qquad} - \boxed{\text{ア}\qquad}}{(t+\Delta t)-t} = \boxed{\text{ウ}\qquad\qquad}$$

を時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ までの エ[　　　] といい，$\overline{v}$ で表す．

点 P の運動を表す関数 $x = f(t)$ のグラフが，右図のようになったとする．



問 題 ①　グラフから数値を読み取り，2s から 7s までの平均速度 $\overline{v}$ を求めよ．

✎注　t 軸は 1 目盛りが 1s，x 軸は 1 目盛りが 10 m としている．

解

割線の傾きと平均速度

2　速度

点Pが数直線上を運動するとき，時刻tから時刻$t+\Delta t$までの平均速度$\overline{v}$は

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

で表された．ここで，Δtを限りなく0に近づける．すなわち，次の極限を考える．

$$\boxed{\text{オ}\qquad\qquad}\cdots(*)$$

を時刻tにおける$\boxed{\text{カ}\qquad}$または$\boxed{\text{キ}\qquad\qquad}$といい，$v$で表す．

一方で，式$(*)$は関数$x=f(t)$の導関数の定義も表している．

速度

時刻αの速度は，$t=\alpha$における$f(t)$の微分係数となる．つまり，$\boxed{\text{ク}\qquad}$である．

例題1　2sにおける速度vを求めよう．

考え方　関数$x=f(t)$を微分し，速度を求めたい時刻を代入する．

解　$x=f(t)$を微分して，$x'=f'(t)$であるから，求める速度vは

$$v=\boxed{\text{ケ}\qquad}.$$

参考　「自動車で2時間，60 km走ったときの時速は？」と問われれば，30 km / hと答えるだろう．ここで，実際に自動車に乗ったときのことを考えてみよう．すると，2時間ずっと30 km / hで走るということが，あり得ないことなのは分かるだろう．2時間の間，速度は時々刻々と変化をしている．自動車のスピードメータは，その瞬間，瞬間の速度を示しているのである．30 km / hというのは，2時間の速度を「平均した」もの（平均速度）に過ぎない．

問題②　2sにおける速度のグラフ上における意味を考えよ．

注　問題①のグラフ上で考える．

解

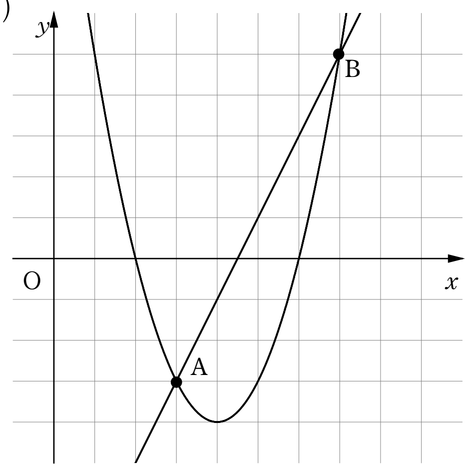
接線の傾きと速度

3年　　組　　番　氏名

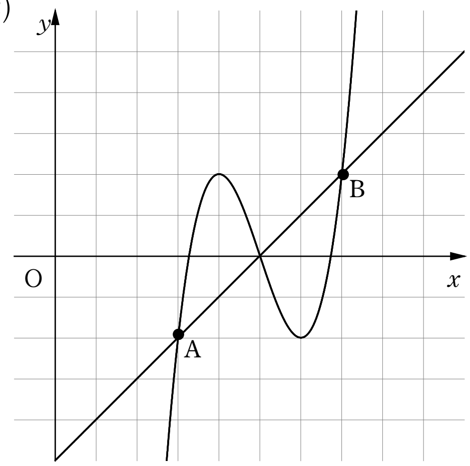
$\boxed{3}$ 引ける？　引けない？

問題①　次の関数のグラフにおいて，直線 AB と平行であり，$3<x<7$ の範囲でグラフと接する接線を引いてみよう．

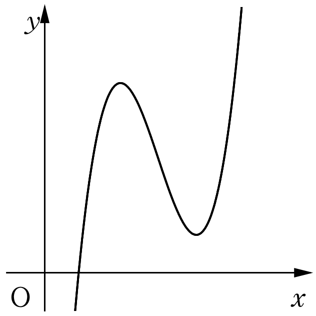
(1)



(2)

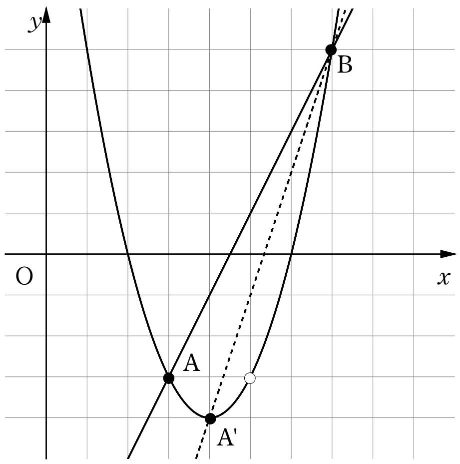


平均値の定理（Lagrange の平均値の定理）



注　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ を満たす c は少なくとも 1 つ存在するのであり，1 つしか存在しないわけではない．

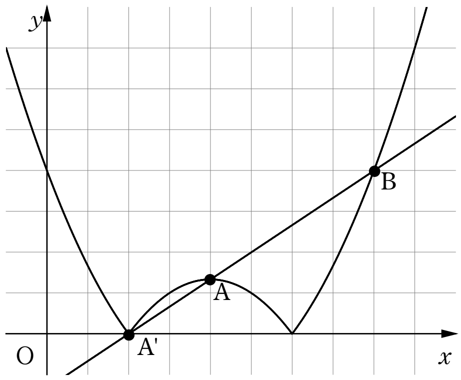
考えよう　区間内に不連続な点がある場合について考えてみよう．



(1)　$3<x<7$ で直線 AB に平行な接線は引けるか．

(2)　$4<x<7$ で直線 A′B に平行な接線は引けるか．

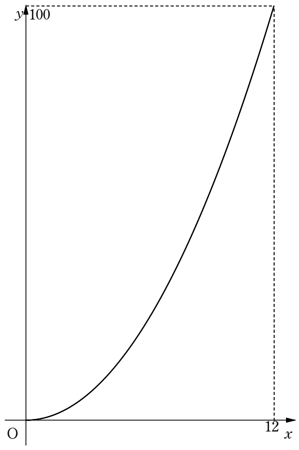
考えよう　区間内に微分可能でない点がある場合について考えてみよう．



(1)　$4 < x < 8$ で直線 AB に平行な接線は引けるか.

(1)　$2 < x < 8$ で直線 A′B に平行な接線は引けるか.

問 題②　英昭くんが 100 m を走ってタイムを計った．スタートから x 秒後の位置を y m としたら，$y = \dfrac{100}{144}x^2$ という式が得られた．右図は，そのグラフである．次の各問いに答えよ．



(1)　スタートからゴールまでの平均速度を求めよ．

解

(2)　スタートからゴールまでに (1) の平均速度と同じになる瞬間はあるか．

解

演習　教科書　**p.98　練習 5**　をノートに解答せよ．

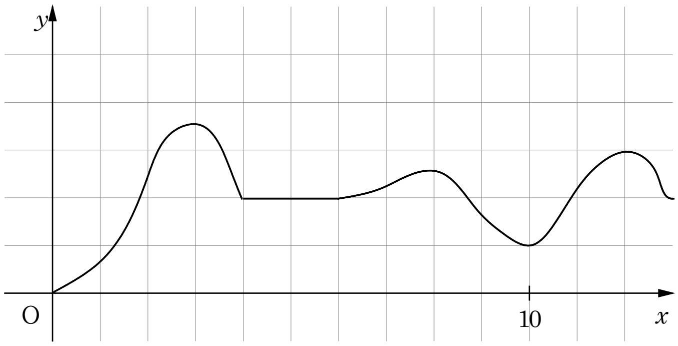
⇨注　解答し終わって余裕がある場合は　**問題集　p.45　基本 98**　をノートに解答せよ．

3 年　　組　　番　氏名

$\boxed{4}$ 上り坂・下り坂

1　関数の増加・減少

問 題①　右の図は，英昭くんが旅行へ行ったときに歩いたハイキングコースの様子を示したものである．x 軸がスタート地点からの移動距離，y 軸がスタート地点からの高さを表している．次の区間を求めよう．



(1)　上り坂の区間はどこか．

(2)　下り坂の区間はどこか．

(3)　平坦な区間はどこか．

関数 $f(x)$ が区間 $[a\,,\ b]=\{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ で ア [　　　] で，区間 $(a\,,\ b)=\{x \mid a < x < b\}$ で イ [　　　] であるとする．

導関数の符号と関数の増加・減少

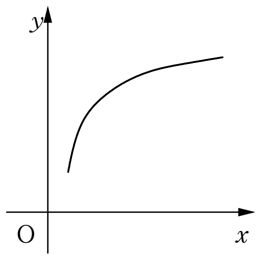
関数 $f(x)$ において

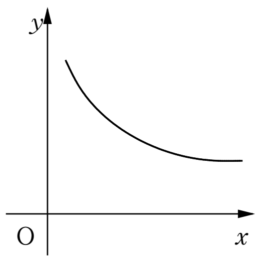
(1)　区間 $(a\,,\ b)$ でつねに，ウ [　　　]

$\Longrightarrow f(x)$ は区間 $[a\,,\ b]$ で エ [　　　]

(2)　区間 $(a\,,\ b)$ でつねに，オ [　　　]

$\Longrightarrow f(x)$ は区間 $[a\,,\ b]$ で カ [　　　]





(3)　区間 $(a\,,\ b)$ でつねに，キ [　　　]

$\Longrightarrow f(x)$ は区間 $[a\,,\ b]$ で ク [　　　]

2　関数の増加・減少と平均値の定理

導関数の符号と関数の増加・減少に関しては，左のように直感的なとらえ方ができることが必要である．しかし，直感的な扱いは数学 II でもしている．そこで，数学 III ではもう少し理論的にとらえることもしてみよう．

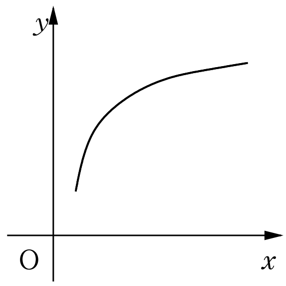
次のことを平均値の定理を使って，証明しよう．

> 関数 $f(x)$ において, 区間 $(a\,,\,b)$ でつねに $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ は区間 $[a\,,\,b]$ で増加する.

証明

区間 $[a\,,\,b]$ において，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の 2 数 x_1，x_2 に対して，平均値の定理より

［ケ］



すなわち

［コ］

を満たす c がとれる．

区間 $(a\,,\,b)$ において，つねに $f'(x)>0$ ならば，x_1 と x_2 の取り方によらず，つねに［サ］となる．ここで［シ］であるから，

［ス］

が成り立つ．よって，枠内の事実が成り立つ．

終

注　関数の増加と減少の厳密な定義は教科書 p.100 の脚注を参照せよ．

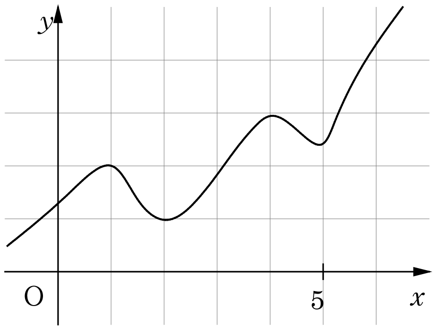
演習　教科書　**p.100**　練習 **7**　をノートに解答せよ．

3 年　　組　　番　氏名

5 頂上と谷底

1 関数の極大・極小

問題① 右の図において，山の頂上はどこだろうか．
また，谷底はどこだろうか．



関数 $f(x)$ が定義域においてア$\boxed{}$であるとする．

関数の極大・極小

関数 $f(x)$ が

(1) $x=\alpha$ を境にしてイ$\boxed{}$からウ$\boxed{}$に移るとき，

$f(x)$ は $x=\alpha$ でエ$\boxed{}$

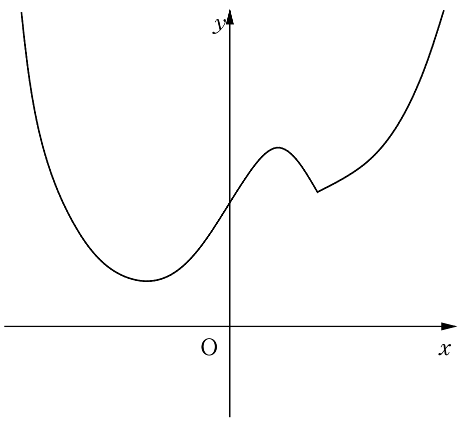
といい，関数の値 $f(\alpha)$ をオ$\boxed{}$という．

(2) $x=\beta$ を境にしてカ$\boxed{}$からキ$\boxed{}$に移るとき，

$f(x)$ は $x=\beta$ でク$\boxed{}$

といい，関数の値 $f(\beta)$ をケ$\boxed{}$という．

➾**注** 関数が極大または極小となるからといって，その点で関数が微分可能であるとはいえない．



問 題②　極小値が，極大値より大きくなる場合はあるだろうか.

①ある　　　　②ない

2 関数の極大値・極小値の求め方

次の手順で関数$f(x)$の極大値・極小値（まとめて**極値**という）を求めることができる.

[1]　$f(x)$の定義域を求める

[2]　導関数$f'(x)$を求める

[3]　$f'(x)=0$となるxの値を求める

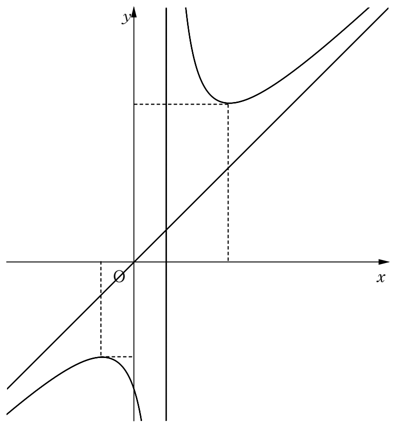
[4]　増減表をつくる

[5]　$f'(x)$の符号が変わる境目が極値をとる点である

例 題❶　関数$f(x)=x+\dfrac{4}{x-1}$の極値を求めよう.

考え方　上の手順にしたがって極値を求める.

解



演 習　**教科書　p.103　練習 10**　をノートに解答せよ.

⇨注　解答し終わって余裕がある場合は　**問題集 p.47 基本 104**　をノートに解答せよ.

3年　　組　　番　氏名

$\boxed{6}$ 缶の材料を少なくするには？

1 関数の最大・最小

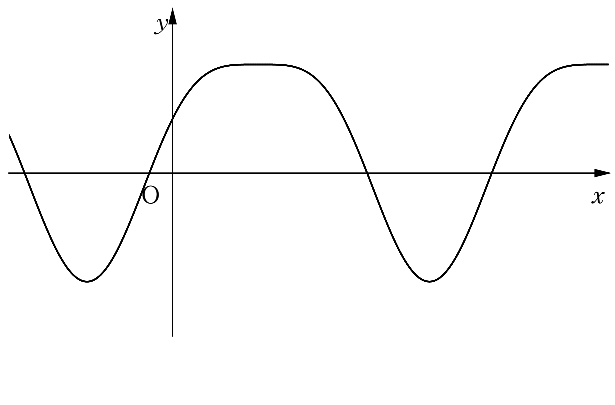
問題① 関数 $f(x)=\cos^2 x+2\sin x$ の増減表を $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲でつくれ.

解

参考 関数 $f(x)=\cos^2 x+2\sin x$ の増減表を $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲を外してつくると次のようになる.

x									
$f'(x)$									
$f(x)$									

また, $f(x)=\cos^2 x+2\sin x$ のグラフは次のようになる.



演習　教科書　**p.106**　**練習 13**　をノートに解答せよ.

⇨**注**　解答し終わって余裕がある場合は　**問題集 p.50 基本 110**　をノートに解答せよ.

2　缶詰工場にて

問題②　円柱形の缶を金属板でつくりたい（缶は両端ともふたで閉じられている）. 缶の容積を一定とした場合に，缶の製作に要する金属板を最小ですませるには，底面の直径 d と高さ h の比をどのようにすればよいか. その比を求めよ. ただし，金属板の厚さは無視できるものとする.

【信州大学　繊維学部　2003 年】

考え方　缶の製作に要する金属板を最小にするとは，缶の表面積を最小にするということ.

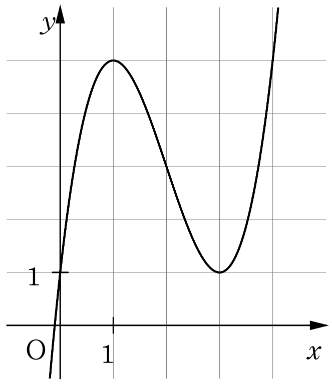
解

3 年　　組　　番　氏名

[7] 右カーブ，左カーブ

1　上に凸・下に凸

問題① 右の図は，関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ が表す曲線（グラフ）である．



(1) 曲線が右へ曲がっている区間はどこか．

(2) 曲線が左へ曲がっている区間はどこか．

(3) 曲線が右から左へと曲がり方を変える点はどこか．

関数のグラフにおいて，

∩のような形のとき $\boxed{ア\quad}$，　∪のような形のとき $\boxed{イ\quad}$

という．また，関数のグラフが

$\boxed{ア\quad}$ から $\boxed{イ\quad}$ に変わる点
または，
$\boxed{イ\quad}$ から $\boxed{ア\quad}$ に変わる点

を $\boxed{ウ\quad}$ という．

2　上に凸・下に凸と第 2 次導関数

ある区間で $f'(x)>0$ というのは「$f(x)$ が増加の状態にある」ということ

⇓

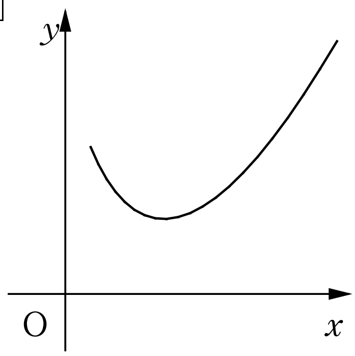
ある区間で $f''(x)>0$ というのは「$\boxed{エ\quad}$」ということ

⇓

これは「接線の傾きが $\boxed{オ\quad}$ している」ということ

⇓

関数のグラフは $\boxed{カ\quad}$ になる．



✎注　$f''(x)<0$ の場合，関数のグラフは上に凸になる．

第２導関数の符号と関数のグラフの凹凸

関数 $f(x)$ が第２次導関数 $f'(x)$ をもつとき，

(1)　ある区間で キ $\boxed{}$ $\Longrightarrow$ その区間で $f(x)$ のグラフは ク $\boxed{}$ である.

(2)　ある区間で ケ $\boxed{}$ $\Longrightarrow$ その区間で $f(x)$ のグラフは コ $\boxed{}$ である.

3　関数グラフの凹凸の調べ方・変曲点の求め方

次の手順で関数 $f(x)$ のグラフの凹凸を調べ，変曲点を求めることができる.

[1]　$f(x)$ の定義域を求める

[2]　導関数 $f''(x)$ を求める

[3]　$f''(x)=0$ となる x の値を求める

[4]　増減表をつくる

[5]　$f''(x)$ の符号が変わる境目が変曲点となる

例題❶　関数 $f(x)=e^{-2x^2}$ のグラフの凹凸を調べよう，また，変曲点ある場合は，その座標を求めよう.

考え方　上の手順にしたがってグラフの凹凸を調べ，変曲点を求める.

解

演習　教科書　**p.108**　練習 **14**　をノートに解答せよ.

⇨**注**　解答し終わって余裕がある場合は　問題集 **p.52** 基本 **114**　をノートに解答せよ.

３年　　組　　番　氏名

8 グラフのかき方

1 グラフの概形

関数 $f(x)$ のグラフの概形は，次の手順でかくことができる．

[1]　$f(x)$ の定義域を求める

[2]　導関数 $f'(x)$ を求める

[3]　第 2 次導関数 $f''(x)$ を求める

[4]　$f'(x)=0$ となる x の値を求める

[5]　$f''(x)=0$ となる x の値を求める

[6]　増減表をつくる

[7]　漸近線を調べる

[8]　増減，凹凸に注意しながらグラフをかく

例 題 1　関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ のグラフの概形をかいてみよう．

考え方　グラフの概形を，関数の増減，グラフの凹凸，変曲点，漸近線を調べてグラフの概形をかく．上の手順にしたがう．

解

演習 $\boxed{\textbf{教科書　p.110　練習 15}}$ をノートに解答せよ.

⇨注　解答し終わって余裕がある場合は $\boxed{\textbf{問題集 p.53 練習 118}}$ をノートに解答せよ.

2　第 2 次導関数と極値

関数 $f(x)$ の極値を判定するのに，第 2 次導関数 $f''(x)$ を利用する方法がある.

第 2 導関数と関数の極値

(1) $\boxed{\text{ア}\quad}$ かつ $\boxed{\text{イ}\quad}$ $\Longrightarrow f(a)$ は $\boxed{\text{ウ}\quad}$ である.

(2) $\boxed{\text{エ}\quad}$ かつ $\boxed{\text{オ}\quad}$ $\Longrightarrow f(a)$ は $\boxed{\text{カ}\quad}$ である.

例題❷　関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ の極値を第 2 次導関数を利用して求めてみよう.

考え方　$f'(x)=0$ となる x を求め，$f''(x)$ に代入して正負を判断する.

解

演習 $\boxed{\textbf{教科書　p.112　練習 16}}$ をノートに解答せよ.

⇨注　解答し終わって余裕がある場合は $\boxed{\textbf{問題集 p.52 基本 117}}$ をノートに解答せよ.

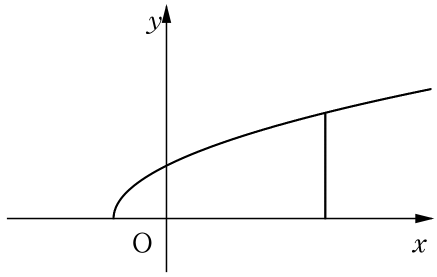
3 年　　組　　番　氏名

9 面積と体積

1 面積

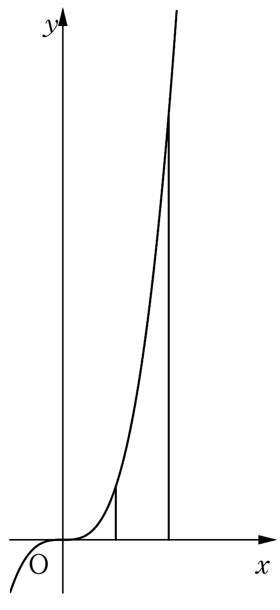
例題1 曲線 $f(x)=\sqrt{x+1}$ と 2 直線 $x=0$，$x=3$ で囲まれた部分の面積求めよう．

解



演習1 $\boxed{\text{教科書　p.153　練習 30　(1)}}$ をプリントに解答せよ．

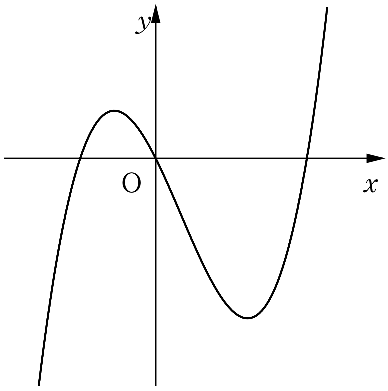
解



例題❷　曲線 $f(x)=x(x+1)(x-2)$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよう.

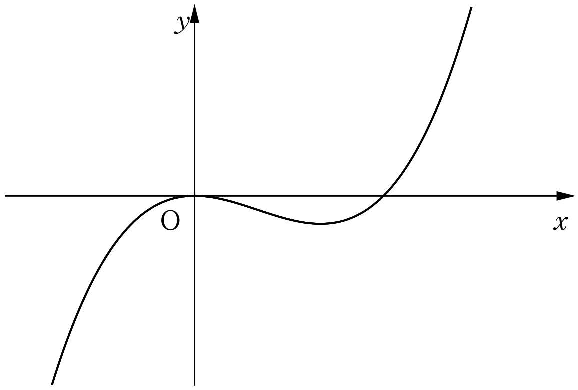
考え方　$f(x)\leqq 0$ となる部分の面積は, $\displaystyle\int_a^b \{-f(x)\}\,dx$ として求める.

解



演習❷　$\boxed{\text{教科書　p.154　練習 31　(1)}}$ をプリントに解答せよ.

解

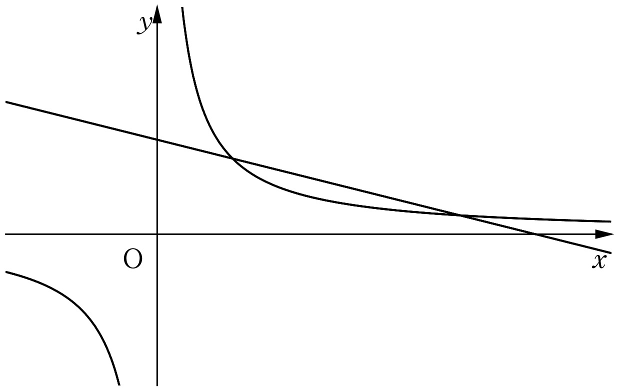


3 年　　組　　番　氏名

例 題 3　直線 $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$ と曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ で囲まれた部分の面積の和を求めよう.

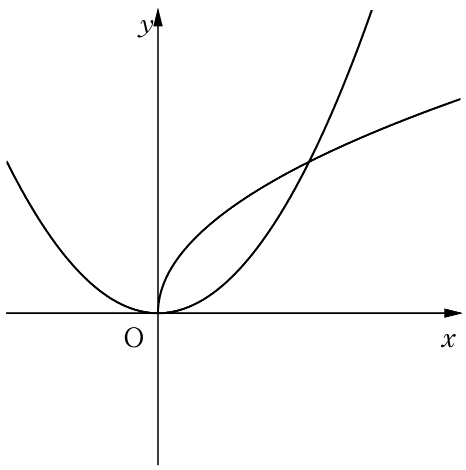
考え方　$f(x) \geqq g(x)$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積は，$\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$ として求める.

解



演習 3　教科書　**p.155**　練習 **33**　(1)　をプリントに解答せよ.

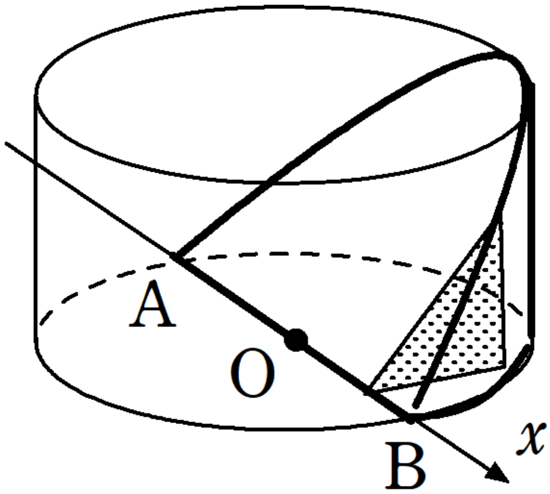
解



2　体積

例題4　底面の半径が 1 で高さも 1 である直円柱がある．この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で，直円柱を 2 つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積を求めよ．

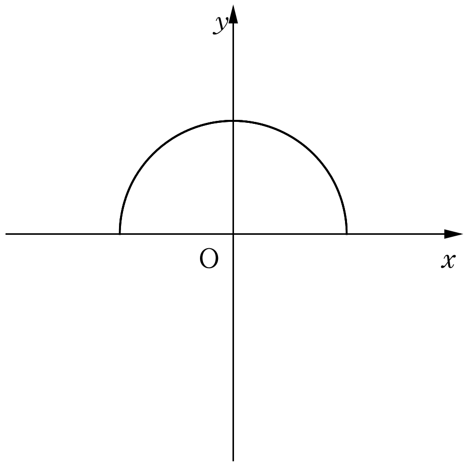
解



3 年　　組　　番　氏名

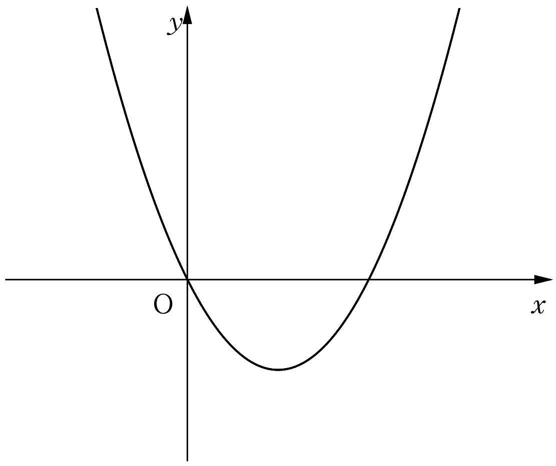
例 題 ❺　曲線 $y=\sqrt{1-x^2}$ と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

解



演 習 ❹　教科書　**p.161**　練習 **39**　(1)　をプリントに解答せよ.

解



3 年　　組　　番　氏名