1 3倍になるのは何時間後？

ある種のバクテリアが 10mg（これを基準量と呼ぶことにする）あって，分裂をくり返しながら **1** 時間で **2** 倍に増えている．次のことを考えてみよう．

（1） 基準量の 8 倍になるのは何時間後か求めよ．

（2） 基準量の $\sqrt{2}$ 倍になるのは何時間後か求めよ．

（3） 基準量の 3 倍になるのは何時間後か求めよ．

上の（3）の記号を使って（1）の答えを表すと次のようになる．

$$\boxed{} = \boxed{}$$

これは，言い方を変えると

$\boxed{}$ は $\boxed{}$ を満たす $\boxed{}$ のこと

である．

一般に，次のように定める．

対数

$0 < a < 1$，$1 < a$，$M > 0$ のとき，

$$a^p = M \Longleftrightarrow p = \log_a M$$

と定め，$\log_a M$ を底を $\boldsymbol{a}$ とする M の対数という．

例題　次の $\boxed{}$ に適当な数を入れる.

（1）　$2^5=32 \Longleftrightarrow \boxed{}=\log_2\boxed{}$　　（2）　$3^{-1}=\dfrac{1}{3} \Longleftrightarrow \boxed{}=\log_3\boxed{}$

（3）　$5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5} \Longleftrightarrow \boxed{}=\log_5\boxed{}$

問題　次の等式を $p=\log_a M$ の形で表せ.

（1）　$3^4=81 \Longleftrightarrow$　　（2）　$2^{-2}=\dfrac{1}{4} \Longleftrightarrow$

（3）　$5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5} \Longleftrightarrow$

問題　次の等式を $p=\log_a M$ の形で表せ.

（1）　$2^0=1 \Longleftrightarrow$　　（2）　$3^1=3 \Longleftrightarrow$

この問題の結果は，一般に次のように言える.

> **対数の性質 1**
>
> $0<a<1$，$1<a$ のとき，
>
> ①　$\log_a 1=0$　　②　$\log_a a=1$

例題　$\log_{\frac{1}{2}} 8$ の値を求める.

$\log_{\frac{1}{2}} 8=x$ とおけば，$\boxed{}$

ここで，$8=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$ であるから，$\boxed{}$　　$\therefore x=-3$.

すなわち，$\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$.

問題　$\log_9 3$ の値を求める.

2年　　組　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{2}$ 緩やかな変化

プリント「$\boxed{1}$ **3 倍になるのは何時間後？**」のバクテリアが基準量の y 倍になるのが，x 時間後であるとすると

$$2^x = y$$

となる．これを対数で表すと

$$y = \boxed{\qquad\qquad}$$

と表せる．

このように対数で表される関数を『**対数関数**』と言う．一般に，次のように表される．

> **対数関数**
>
> $0 < a < 1$，$1 < a$ のとき，
>
> $$y = \log_a x$$
>
> で表される関数を，**底を a とする対数関数**という．

この対数関数はどのような変化をするのか，$y = \log_2 x$ をグラフにして見てみよう．

対応表

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32
y									

グラフ

対数関数 $y = \log_2 x$ のグラフを見ると，次のことが分かる．

① 定義域：$\boxed{\qquad\qquad}$

値　域：$\boxed{\qquad\qquad}$

② グラフは点 $\boxed{}$ を通る.

③ x の値が $\boxed{}$ するとき, y の値は $\boxed{}$ する.

④ グラフの漸近線は $\boxed{}$ である.

問題 対数関数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ について対応表を完成し, グラフをかけ（左の方眼紙に記入せよ).
また, グラフを見て, ① ～ ④ の文の空欄を埋めよ.

対応表

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32
y									

① 定義域 : $\boxed{}$

値　域 : $\boxed{}$

② グラフは点 $\boxed{}$ を通る.

③ x の値が $\boxed{}$ するとき, y の値は $\boxed{}$ する.

④ グラフの漸近線は $\boxed{}$ である.

参考 ① 対数関数 $y = \log_2 x$ のグラフと指数関数 $y = 2^x$ のグラフとは直線 $y = x$ に関して対称となっている.

② 対数関数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフと指数関数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフとは直線 $y = x$ に関して対称となっている.

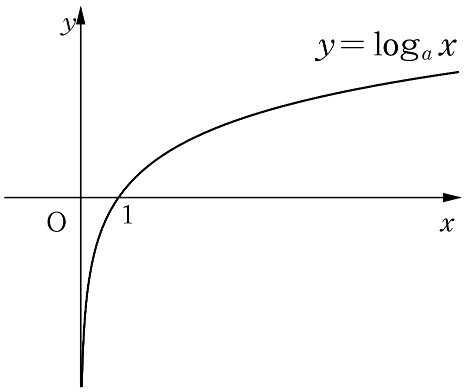
2年　　組　　番　氏名

$\boxed{3}$ どちらが大きい？

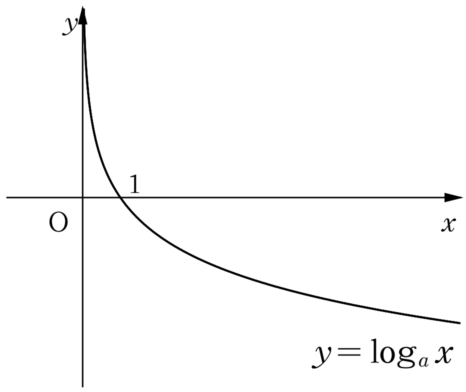
プリント「$\boxed{2}$ **緩やかな変化**」で $y=\log_2 x$ と $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフをかいた．これを一般的な形でまとめておこう．

対数関数のグラフ

$\boxed{\qquad\qquad}$ のとき



$\boxed{\qquad\qquad}$ のとき



① 定義域：$\boxed{\qquad\qquad}$ 　値域：$\boxed{\qquad\qquad}$

② グラフは点 $\boxed{\qquad\qquad}$ を通る．

③ x の値が $\boxed{\qquad}$ するとき，y の値は $\boxed{\qquad}$ する．

③ x の値が $\boxed{\qquad}$ するとき，y の値は $\boxed{\qquad}$ する．

④ グラフの漸近線は $\boxed{\qquad}$ である．

$\boxed{\text{問 題}}$ 対数関数 $y=\log_3 x$ と $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ のグラフをかけ．

いま，$\log_3 5$ と $\log_3 7$ の大小を比較してみる．$\log_3 5$ と $\log_3 7$ を対数関数 $y=\log_3 x$ の x にそれぞれ 5 と 7 を代入したものと考えると，グラフより，

$$5<7 \Longrightarrow \log_3 5 \ \boxed{\quad}\ \log_3 7$$

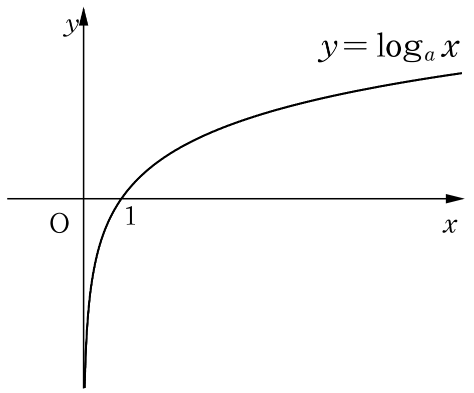
となることがわかる．

［問 題］　$\log_{\frac{1}{3}} 5$ と $\log_{\frac{1}{3}} 7$ の大小を対数関数 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ のグラフを利用して比較せよ．

一般に，次のことがいえる．

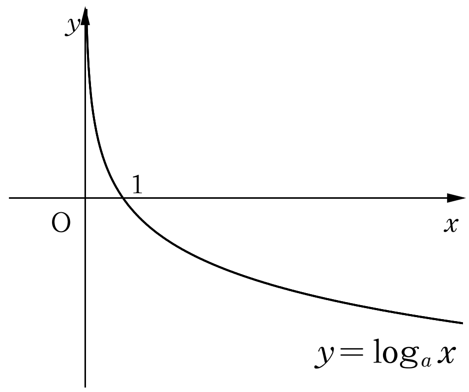
対数関数の性質

$\boxed{\qquad\qquad}$ のとき



$M \ \boxed{\quad}\ N \Longleftrightarrow \log_a M \ \boxed{\quad}\ \log_a N$

$\boxed{\qquad\qquad}$ のとき



$M \ \boxed{\quad}\ N \Longleftrightarrow \log_a M \ \boxed{\quad}\ \log_a N$

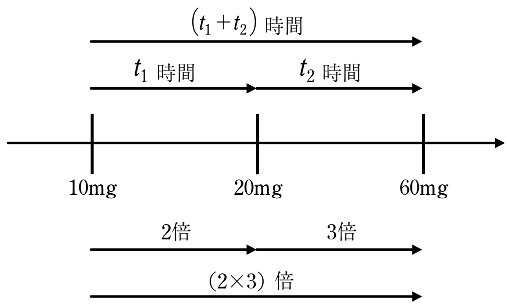
［問 題］　$\log_4 7$，$\log_4 3$，$\log_4 8$ を小さい順に並べよ．

2 年　　組　　番　氏名

$\boxed{4}$ 2 倍の 3 倍になるのは何時間後？

ある種のバクテリアが 10mg（これを第 1 基準量と呼ぶことにする）あって，分裂をくり返しながら 1 時間で 2 倍に増えている．

いま，t_1 時間後に第 1 基準量の 2 倍になるとする（つまり，20mg のこと．これを第 2 基準量と呼ぶことにする）．さらに，t_2 時間後に第 2 基準量の 3 倍になるとしよう．このとき，次の $\boxed{\quad}$ を埋めよ．



このバクテリアは 1 時間で 2 倍に増えるので，t_1，t_2 を対数で表すと，

$$t_1 = \boxed{\qquad\qquad}\ ,\quad t_2 = \boxed{\qquad\qquad}$$

である．また，(t_1+t_2) 時間後には，第 1 基準量の (2×3) 倍になるので，t_1+t_2 を対数で表すと，

$$t_1+t_2 = \boxed{\qquad\qquad}$$

となる．以上より，

$$\boxed{\qquad\qquad} + \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

が成り立つ．

一般に，次のことがいえる．

対数の性質 ❷

$0<a<1$，$1<a$，$M>0$，$N>0$ のとき，　$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

この性質を利用して，次のようなことを考えられる．

$$4\times\log_3 2 = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

これは，次のように一般化できる．

対数の性質 ❸

$0<a<1$，$1<a$，$M>0$，$N>0$ のとき，　$r\log_a M=\log_a M^r$

以上，2つの性質を利用すると，次のようなことを考えられる．

$$\log_{10}18-\log_{10}3=\boxed{}$$

$$=\boxed{}$$

$$=\boxed{}=\boxed{}$$

これは，次のように一般化できる．

対数の性質 4

$0<a<1$，$1<a$，$M>0$，$N>0$ のとき，　$\log_a M-\log_a N=\log_a\dfrac{M}{N}$

例題　次の計算をする．

（1）　$\log_6 3+\log_6 12=\boxed{}=\boxed{}=\boxed{}=\boxed{}$

（2）　$\log_3\sqrt{6}-\dfrac{1}{2}\log_3 2=\boxed{}=\boxed{}$

$$=\boxed{}=\boxed{}=\boxed{}=\boxed{}$$

問題　次の計算をせよ．

（1）　$\log_6 12+\log_6 18=$

（2）　$\dfrac{1}{2}\log_5 10-\log_5\sqrt{2}=$

（3）　$\log_4\dfrac{4}{9}+2\log_4 6=$

2年　　組　　番　氏名

5 2を何乗したら3倍になる？

プリント「1 **3倍になるのは何時間後？**」で$\log_2 3$という対数を考えた．ここでは，この対数の値を求めることを考えよう．この値を求めるのに**常用対数**という対数を用いる．

常用対数

$M>0$のとき，　$\log_{10} M$　をMの常用対数という．

➡**注**　常用対数は，常用対数表（別紙参照）と呼ばれる表からその値を求めることができる．

例題　$\log_{10} 1.43$の値を常用対数表を用いて求める．

解

例題　$\log_{10} 116$の値を常用対数表を用いて求める．

考え方　$116 = \boxed{} \times 10^{\square}$と変形して考える．

解 $\log_{10} 116 =$

問題　常用対数表を用いて，次の値を求めよ．

（1）　$\log_{10} 1.32 =$

（2）　$\log_{10} 103 =$

底が10ではない対数については，底を10に変換してその値を求めることができる．変換するための公式が次の公式である．

対数の性質 5【底の変換公式】

a，b，cが正の実数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$のとき，　$\log_a b = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

この変換公式を利用して，$\log_2 3$の値を求めてみよう．

$$\log_2 3 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

例 題　$\log_9 \sqrt{3}$ の値を求める.

考え方　底を 2 にすれば，常用対数を用いなくとも値が求められる.

解

$$\log_9 \sqrt{3} = \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} = \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} = \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} = \boxed{\quad}$$

問 題　次の値を求めよ.

（1）　$\log_4 8 =$

（2）　$\log_5 \dfrac{1}{125} =$

例 題　$\dfrac{\log_9 64}{\log_3 2}$ を計算する.

考え方　2 つの対数の底を同じにして計算する.

解

$$\log_9 \sqrt{3} = \boxed{\quad} \cdot \frac{1}{\boxed{\quad}} = \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} \cdot \frac{1}{\boxed{\quad}}$$

$$= \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} \cdot \frac{1}{\boxed{\quad}} = \boxed{\quad}$$

問 題　次の計算をせよ.

（1）　$\log_3 18 - \log_9 4 =$

（2）　$\log_2 3 \cdot \log_3 2 =$

2年　　組　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

6 対数を含む方程式・不等式

プリント「4 **2倍の3倍になるのは何時間後？**」で学んだ **対数の性質 2 〜4**②を利用して対数を含んだ方程式と不等式を解いてみよう．

例題 方程式 $\log_2 x + \log_2 (x-2) = 3$ を解く．

考え方 左辺を**対数の性質 2** を使って，1つの対数にする．

解 真数は正であるから，$\boxed{}$，$\boxed{}$ となるので

$\boxed{}$ $\cdots$ ①

与式より，

$$\boxed{} = 3$$

$$\boxed{} = \boxed{}$$

$$\boxed{} = \boxed{}$$

$$\boxed{} = \boxed{}$$

ここで，① より

$$x = 4.$$

問題 方程式 $\log_3 x + \log_3 (x-6) = 3$ を解け．

解

例 題　不等式 $\log_{10}(2x+6)>1$ を解く.

解　真数は正であるから, $\boxed{}$ となるので

$\boxed{}$ $\cdots$ ①

与式より,

$\boxed{} = \boxed{}$

$\boxed{}$

$\boxed{} < \boxed{}$

$\therefore x<7$ $\cdots$ ②

よって, ①, ② より

$\boxed{}$.

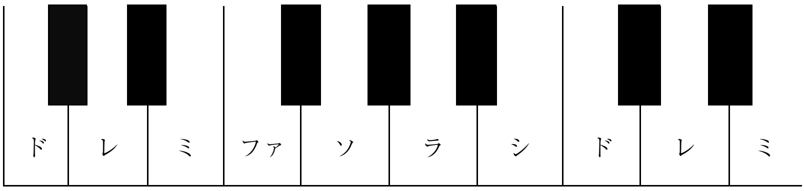
問 題　不等式 $\log_3(x-4)<2$ を解け.

解

2 年　　組　　番　氏名

7 楽器にひそむ一定倍

ピアノなどで使われる音階のド・レ・ミ・ファ・ソ・ラ・シ・ドは平均律音階と呼ばれる．



平均律音階の場合，各音を出す振動体の長さは，隣の振動体の長さの r 倍になっている．この r はドの振動体の長さを L としたとき，1 オクターブ下のドの振動体の長さを $2L$ となるように決める．

このを r を求めてみよう．1 オクターブに注目すると，

音階	振動体の長さ
ド	$2L$
C#	$L\times r^{11}$
レ	$L\times r^{10}$
D#	$L\times r^{9}$
ミ	$L\times r^{8}$
ファ	$L\times r^{7}$
F#	$L\times r^{6}$
ソ	$L\times r^{5}$
G#	$L\times r^{4}$
ラ	$L\times r^{3}$
A#	$L\times r^{2}$
シ	$L\times r$
ド	L

$$\square \times \square = 2L$$

が成り立つ．この式の両辺を L で割ると，

$$\square = \square$$

となる．この式の両辺の常用対数をとると，

$$\square = \square,$$

$$\square = \square,$$

$$\square = \square$$

$$= \square$$

が得られる．

よって，

$$\square = \square = \square \fallingdotseq 1.06 .$$

つまり，隣り合う 2 音の振動体の長さは約 1.06 倍の比率になっているのである．この結果を利用して，紙笛をつくってみる．

笛の長さによって音階が異なる．各音階の笛の長さは次の表の通りである．

音階	ド	$C^{\#}$	レ	$D^{\#}$	ミ	ファ	$F^{\#}$	ソ	$G^{\#}$	ラ	$A^{\#}$	シ	ド
長さ（cm）	16.5	15.6	14.7	13.9	13.1	12.4	11.7	11	10.4	9.9	9.3	8.8	8.3

上の表は，「ソ」の長さ 11cm を基準にして，隣り合う 2 音の長さを約 1.06 倍になるようにしたものである．

2 年　　組　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿