定積分と図形の体積

x 軸に垂直な 2 つの平面 α，β にはさまれた立体の部分の体積 V（図 1）を求めてみよう．そこで，図 2 のように平面 α，β と x 軸の交点の座標を a，b とし，zx 平面からの体積を表す関数 $V(x)$ と切り口の面積を表す関数 $S(x)$ を考える．すると，

$V=$

となるので，$V(x)$ を表す式が分かれば V を求めることができる. そこで, **$V(x)$ を表す式を求めることを考えよう**.

関数 $V(x)$ に対して，図 3 のような状況を考える．このとき，

$v_1=$

$v_2=$

$v_3=$

となるが，図 3 よりあきらかに $v_2<v_1<v_3$ であるから，

両辺を h で割って

この式で h を限りなく 0 に近づけると，左辺と右辺は $S(x)$ に近づくので

が成り立つ．

すなわち，$\boxed{V(x)\text{ は微分すると }S(x)\text{ になる関数である}}$.

よって，

図1

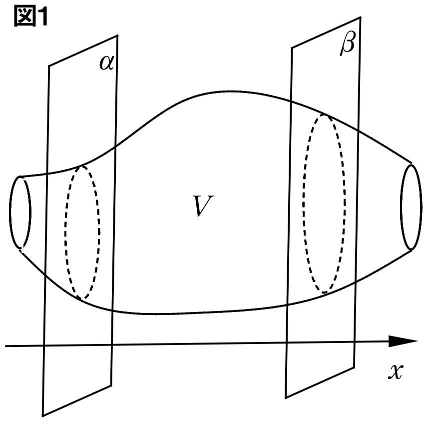


図2

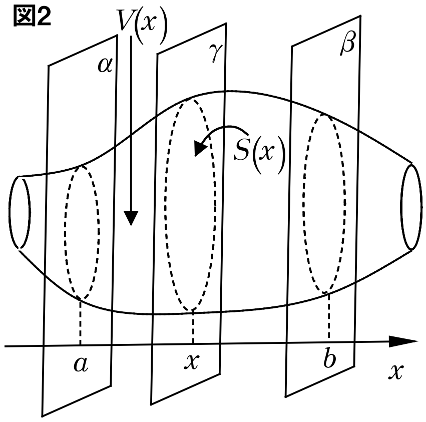
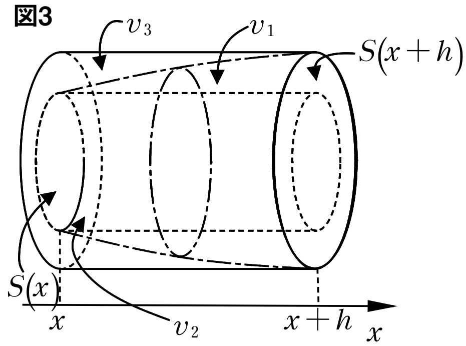


図3



➾**注．** 面積 V（図 1）を求めるには $S(x)$ の原始関数 $V(x)$ を求め，b を代入したものから a を代入したものを引けばよい．