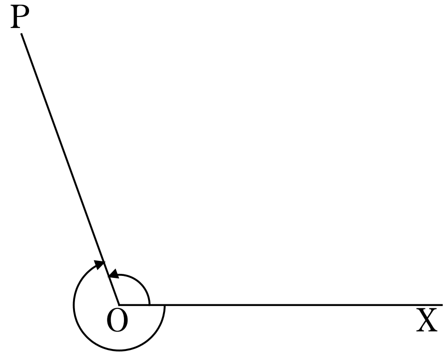
$\boxed{1}$ グルグル回る角

右図で半直線OPが半直線OXをスタートして回転するとき，その回転角を考えてみよう．

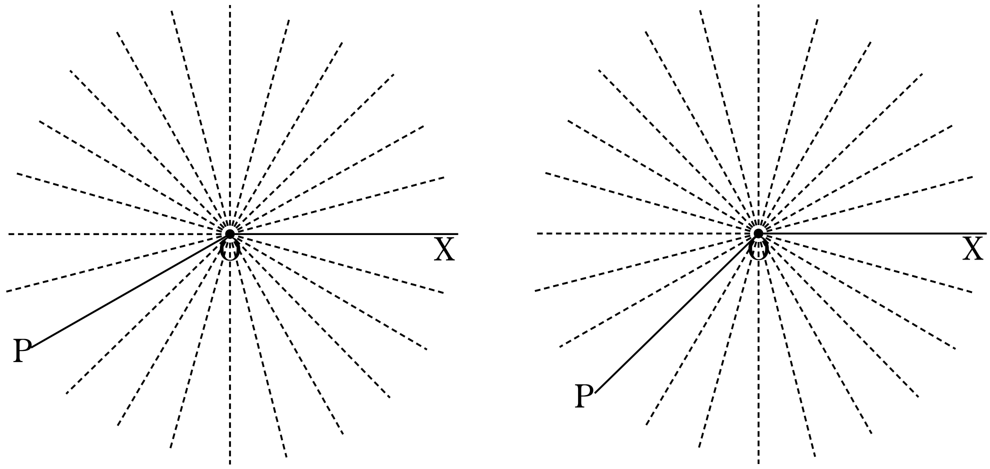


回転運動を考えたとき, その回転は1回転(360°)だけとは限らず，1回転を超えて回転する場合もある．

また，回転の向きも左回り（反時計回り）と右回り（時計回り）の2通りが考えられる．

以上のようなことを踏まえた上で，角の大きさを拡張してみよう．

例題❶　動径OPを570°，−135°回転させると，それぞれ次のようになる．

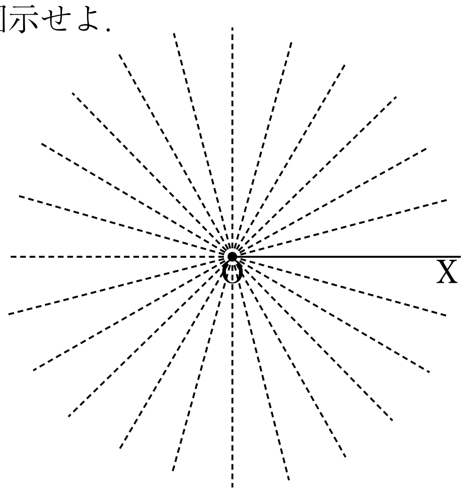


問題①　次の角の回転を表す動径それぞれ図示せよ．

(1)　120°

(2)　840°

(3)　−240°



用語解説　大きさを0°以上360°以下に制限せず，正負の符号も含めて考えた角を**一般角**という．

一般角について，次のことがいえる．

一般角

角 $\alpha\,(0° \leqq \alpha < 360°)$ の動径が表す一般角は，

$$\alpha + 360° \times n \qquad (n \text{は整数})$$

例題❷　$45°$ の一般角は，$45° + 360° \times n$ となる．

例題❸　(1)　$420°$ を $\alpha + 360° \times n$（$0° \leqq \alpha < 360°$，n は整数）の形で表すと

$$420° = 60° + 360° \times 1$$

となる．

(2)　$-675°$ を $\alpha + 360° \times n$（$0° \leqq \alpha < 360°$，n は整数）の形で表すと

$$-675° = 45° + 360° \times (-2)$$

となる．

問題②　次の角を $\alpha + 360° \times n$（$0° \leqq \alpha < 360°$，n は整数）の形で表せ．

(1)　$730° =$

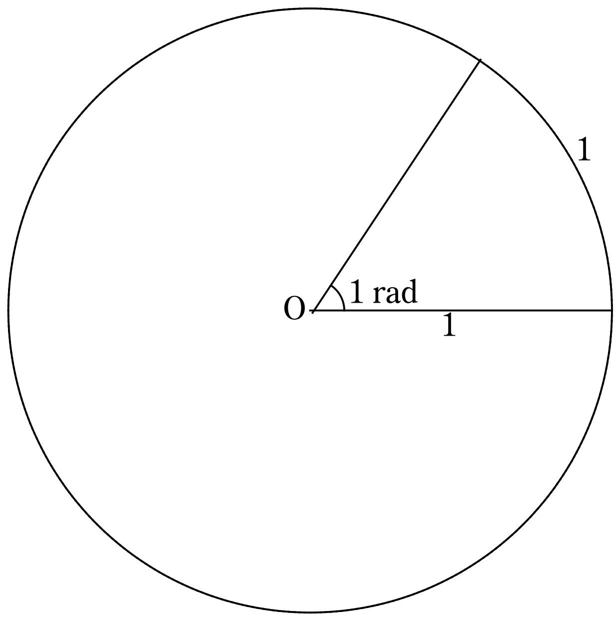
(2)　$-210° =$

2年　　組　　番　氏名

$\boxed{2}$ 新しい角の表し方

角の大きさを表すのに，これまでは 1 回転を360°とする 60 分法を用いてきた．この他にも，角の表し方には弧の長さをもとにする**弧度法**という方法もある．

弧度法とは, 半径 1 の円において長さが 1 の弧に対する中心角を 1 rad（ラジアン；弧度）と定め，角の大きさを表していく．つまり，弧の長さで角の大きさを表すのである．



では，角の大きさを弧度法で表した場合と度数法で表した場合の関係をみてみよう．

半径 1 の円の円周の長さは,

$$\boxed{}$$

となる．つまり，弧度法で円の中心角は

$$\boxed{}\ \text{rad}$$

ということである．60 分法で円の中心角は360°であるから,

$$\boxed{}\ \text{rad} = 360^\circ.$$

つまり,

$$1\ \text{rad} = \boxed{} \quad \cdots(1) \qquad 1^\circ = \boxed{}\ \text{rad} \quad \cdots(2)$$

となる．

式 (2) を利用すると，次のような 60 分法で表した角の大きさと弧度法で表した角の大きさの対応表をつくることができる．

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度									

度	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度								

✏注　弧度法では，ふつう単位名の rad は省略する．

弧度法の場合，一般角について，次のことがいえる．

一般角（弧度法）

角 $\alpha\,(0 \leqq \alpha < 2\pi)$ の動径が表す一般角は，

$$\alpha + 2n\pi \qquad (n\text{ は整数})$$

例題❶　$-\dfrac{19}{4}\pi$ を $\alpha + 2n\pi$（$0 \leqq \alpha < 2\pi$，n は整数）の形で表すと

$$-\frac{19}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi + 2\pi \times (-3)$$

となる．

問題①　次の角を $\alpha + 2n\pi$（$0 \leqq \alpha < 2\pi$，n は整数）の形で表せ．

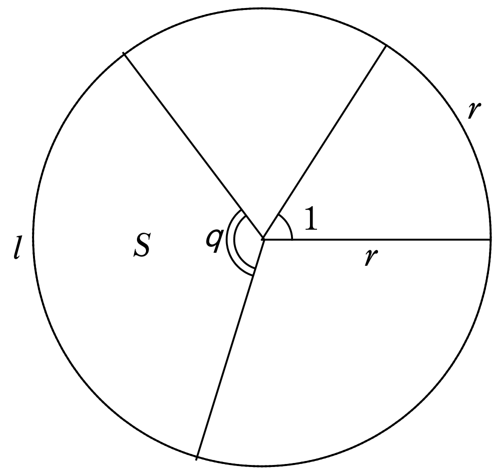
$$\frac{20}{3}\pi =$$

円において，扇形の弧の長さも面積もその中心角に比例する．したがって，半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると，

$$\boxed{} : \boxed{} = \theta : 1,\qquad \boxed{} : \boxed{} = \theta : 2\pi$$

よって，

$$l = \boxed{},\quad S = \boxed{} = \boxed{}.$$



例題❷　半径 6，中心角 $\dfrac{2}{3}\pi$ の扇形の

$$\text{弧の長さ：}6 \cdot \frac{2}{3}\pi = 4\pi,\quad \text{面積：}\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(6 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) = 12\pi$$

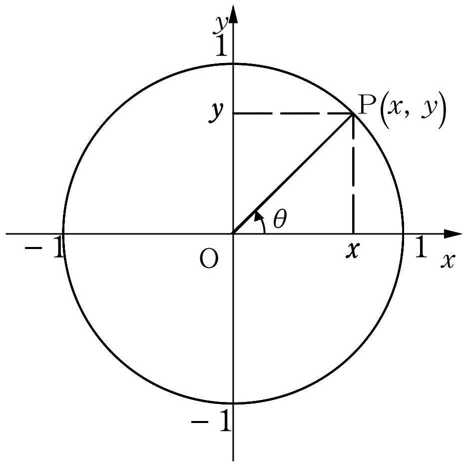
となる．

問題②　半径 8，中心角 $\dfrac{3}{4}\pi$ の扇形の弧の長さと面積を求めよ．

2 年　　組　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{3}$ サイン・コサイン・タンジェント

右図のように半径1の円（単位円）上の点Pの座標は，x軸の正の部分と線分OPのなす角θによって決まる．そこで，点Pの座標を次のように表す．



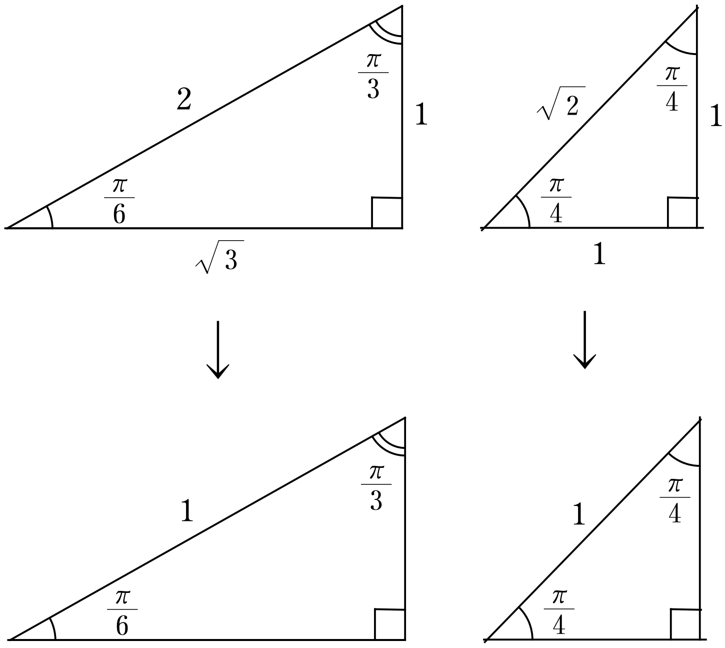
三角関数（円関数）

$\sin\theta=y$，$\cos\theta=x$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

注　$\tan\theta$は$x\neq 0$となるθに対して定義される．

参考　$0\leqq\theta\leqq\pi$のとき，これらの値は三角比の値と一致する．

三角関数の値を求めるのに，次の直角三角形の辺の比を利用する場合がある．斜辺を線分OPとして考えるために，斜辺の長さを1にする．このとき，底辺と隣辺の値も次のように変わる．

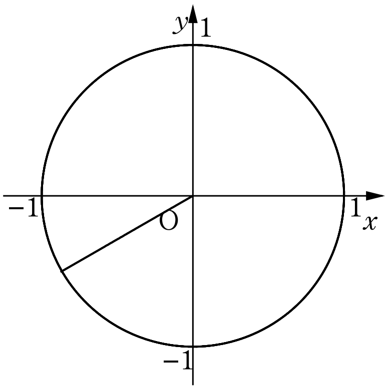


例題❶　$\sin\dfrac{7}{6}\pi$，$\cos\dfrac{7}{6}\pi$，$\tan\dfrac{7}{6}\pi$の値を求めてみよう．

下図において，単位円と$\dfrac{7}{6}\pi$の動径との交点Pの座標は，右図の直角三角形を利用して

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

となることが分かる．



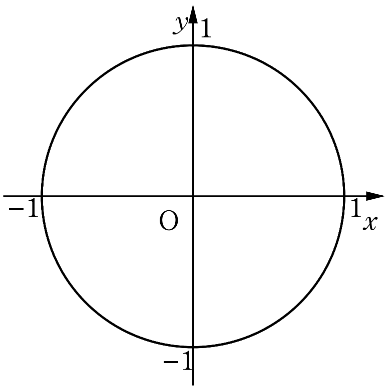
したがって，

$$\sin\frac{7}{6}\pi=-\frac{1}{2},\quad \cos\frac{7}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{7}{6}\pi=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる．

問題① $\sin\frac{9}{4}\pi$，$\cos\frac{9}{4}\pi$，$\tan\frac{9}{4}\pi$ の値を求めよ．

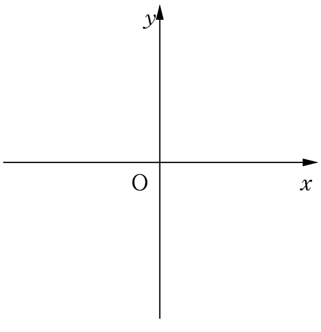


主要な角について，三角関数の値を表にまとめておこう．

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

θ	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin\theta$								
$\cos\theta$								
$\tan\theta$								

三角関数の定義と上の表から次のことが成り立つことがわかる．
角 θ がどの象限の角であるかによって，三角関数の値が右図のように決まる．



また，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は

$$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1, \qquad -1 \leqq \cos\theta \leqq 1$$

の範囲の値をとる．

2 年　　組　　番　氏名

4 三角関数の性質

プリント「3 **サイン・コサイン・タンジェント**」では，単位円上の点 P の座標を求めることで三角関数の値を求めた．ここでは，三角関数の性質を使って値を求めてみよう．

三角関数の性質 1

① $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$　② $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$　③ $\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

例題 1　$\cos\dfrac{7}{6}\pi$ の値を求める．

考え方　$\dfrac{7}{6}\pi=\dfrac{\pi}{6}+\pi$ より，三角関数の性質 1 の ② において $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ とする．

解　$\cos\dfrac{7}{6}\pi=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

問題 ①　次の三角関数の値を求めよ．

(1) $\sin\dfrac{5}{4}\pi=$

(2) $\tan\dfrac{5}{4}\pi=$

三角関数の性質 2

④ $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$　⑤ $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$　⑥ $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

例題 2　$\cos\dfrac{2}{3}\pi$ の値を求める．

考え方　$\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}$ より，三角関数の性質 2 の ⑤ において $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ とする．

解　$\cos\dfrac{2}{3}\pi=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$．

問題 ②　次の三角関数の値を求めよ．

(1) $\sin\dfrac{5}{6}\pi=$

(2) $\tan\dfrac{5}{6}\pi=$

三角関数の性質 3

⑦ $\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$　⑧ $\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$　⑨ $\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$

例題❸　$\cos\dfrac{17}{4}\pi$ の値を求める.

考え方　$\dfrac{17}{4}\pi=\dfrac{\pi}{4}+2\pi\cdot 2$ より, 三角関数の性質 ❸ の ⑧ において $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ とする.

解　$\cos\dfrac{17}{4}\pi=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi\cdot 2\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

問題③　次の三角関数の値を求めよ.

$\tan\dfrac{19}{3}\pi=$

三角関数の性質 ❹

⑩　$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　⑪　$\cos(-\theta)=\cos\theta$　⑫　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

例題❹　$\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を求める.

考え方　三角関数の性質 ❹ の ⑪ において $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ とする.

解　$\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$.

問題④　次の三角関数の値を求めよ.

$\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=$

例題❺　三角関数の性質 ❶ ～ ❹ を使い, $\sin\left(-\dfrac{35}{6}\pi\right)$ を求めると,

$$\sin\left(-\frac{35}{6}\pi\right)=-\sin\frac{35}{6}\pi=-\sin\left(\frac{11}{6}\pi+2\pi\cdot 2\right)=-\sin\frac{11}{6}\pi=-\sin\left(\frac{5}{6}\pi+\pi\right)$$

$$=-\left(-\sin\frac{5}{6}\pi\right)=\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

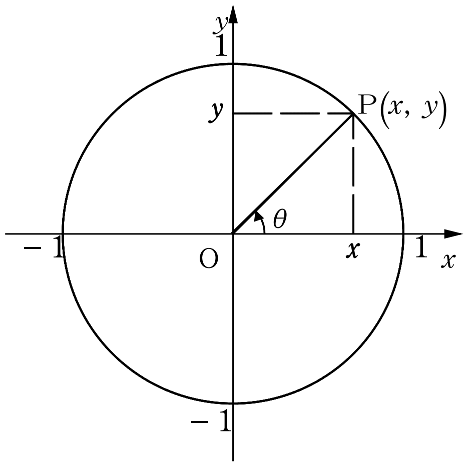
問題⑤　次の三角関数の値を求めよ.

$\sin\left(-\dfrac{23}{3}\pi\right)=$

2年　　組　　番　氏名

5 三角関数の相互関係

三角関数 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の間に成り立つ関係について考えてみよう.



単位円の方程式は

$$\boxed{}^2+\boxed{}^2=1 \quad \cdots \ (1)$$

であり, 右図の点 P の x 座標, y 座標は, 三角関数の定義より

$$\left.\begin{array}{l} x=\boxed{} \\ y=\boxed{} \end{array}\right\} \quad \cdots \ (2)$$

となる. (2) を (1) に代入して, 次の関係式が得られる.

$$\boxed{}$$

また, 定義より $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ であるから (2) を代入して次の関係式が得られる.

$$\boxed{}$$

三角関数の相互関係

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ② $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

例 題 1 θ が第 4 象限の角で, $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき, $\sin\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ.

解 $\boxed{}$ より

$$\sin^2\theta=\boxed{}=\boxed{}=\boxed{}.$$

θ が第 4 象限の角であることから, $\boxed{}$ となるので

$$\sin\theta=\boxed{}=\boxed{} \quad \cdots \text{(答)}$$

$$\tan\theta=\boxed{}=\boxed{}=\boxed{} \quad \cdots \text{(答)}$$

問題① θが第3象限の角で，$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$の値を求めよ．

解

例題❷ θが第4象限の角で，$\tan\theta=-2$のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$の値を求めよ．

解 $\boxed{}$ より，$\sin\theta=\boxed{}$ $\cdots$ (1)

(1) を $\boxed{}$ に代入して整理すると

$\cos^2\theta=\boxed{}$.

θが第4象限の角であることから，$\boxed{}$ となるので

$\cos\theta=\boxed{}=\boxed{}$ $\cdots$ **(答)**

これを (1) に代入して，$\sin\theta=\boxed{}$ $\cdots$ **(答)**

問題② θが第3象限の角で，$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$の値を求めよ．

解

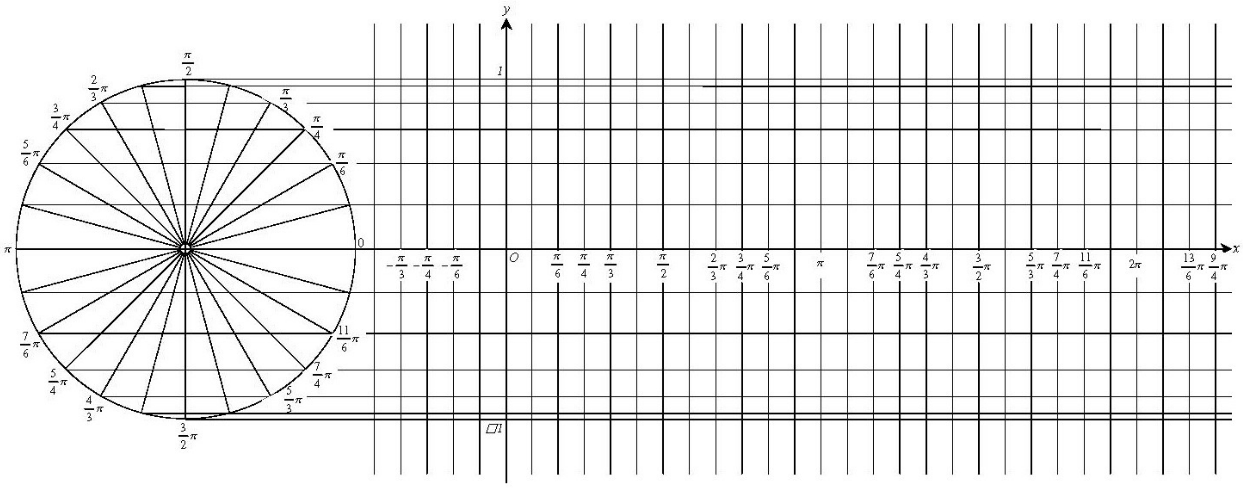
2年　　組　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

6 波はくり返す

三角関数$y=\sin\theta$と$y=\cos\theta$の定義をプリント「3 **サイン・コサイン・タンジェント**」で学んだ．ここでは，それをもとにして$y=\sin\theta$と$y=\cos\theta$のグラフをかき，値の変化の様子を見てみよう．

1　$y=\sin\theta$ のグラフ

定義より，$\sin\theta$は単位円周上を回転する点のy座標である．それを利用して，次の座標平面に点を打ち滑らかな曲線で結んでみよう．



問題① 　$y=\sin\theta$のグラフを見て，次の空欄を埋めよ．

(1)　$y=\sin\theta$のグラフは $\boxed{\text{ア}\quad}$ ごとに同じ形がくり返される．

注　三角関数の性質 3（プリント「4 **三角関数の性質**」を参照）より，$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$であることが分かる．

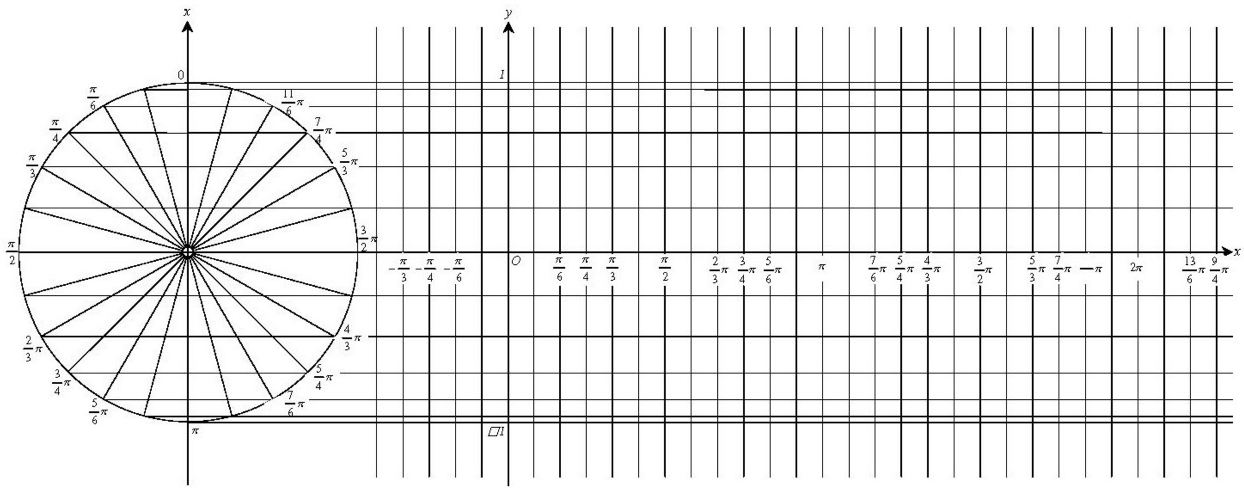
(2)　$y=\sin\theta$のグラフは $\boxed{\text{イ}\quad}$ に関して対称である．

参考　このような関数を**奇関数**という．$\boxed{\text{ウ}\quad}$ が成り立つ．

用語解説　$y=\sin\theta$のグラフの曲線を $\boxed{\text{エ}\quad}$ または $\boxed{\text{オ}\quad}$ という．

2　$y=\cos\theta$ のグラフ

定義より，$\cos\theta$は単位円周上を回転する点のx座標である．それを利用して，次の座標平面に点を打ち滑らかな曲線で結んでみよう．



問題② $y=\cos\theta$ のグラフを見て，次の空欄を埋めよ．

(1) $y=\cos\theta$ のグラフは [カ　　] ごとに同じ形がくり返される．

注　三角関数の性質❸（プリント「④ **三角関数の性質**」を参照）より，$\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$ であることが分かる．

(2) $y=\cos\theta$ のグラフは [キ　　] に関して対称である．

参考　このような関数を**偶関数**という．[ク　　] が成り立つ．

❸ $y=\sin\theta$ のグラフと $y=\cos\theta$ のグラフ

$y=\cos\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に [ケ　　] にだけ平行移動したものになっている．

三角関数の性質❷（プリント「④ **三角関数の性質**」を参照）より，$\cos\theta=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ となることからも分かる．

一般に，$y=\sin x$，$y=\cos x$ のグラフをそれぞれ x 軸方向に p だけ平行移動した関数は，

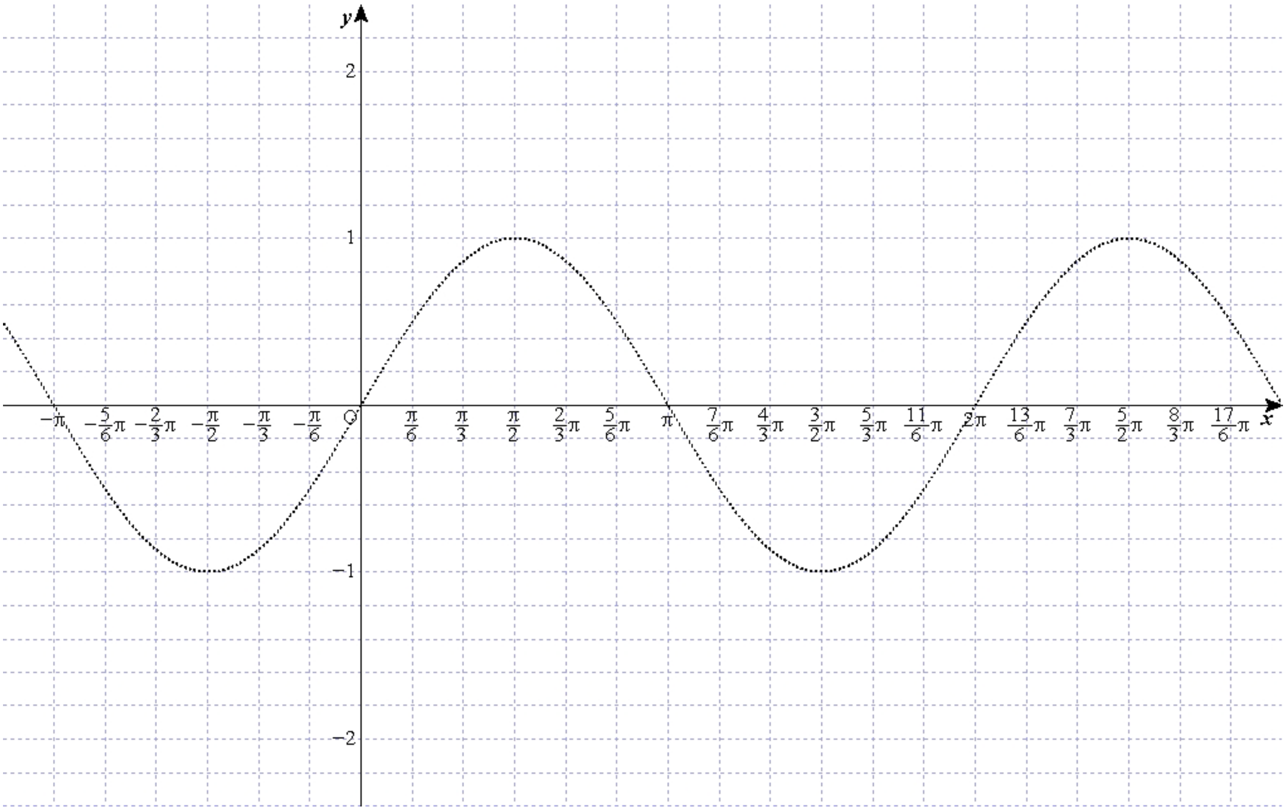
[コ　　]，[サ　　]．

2年　　組　　番　氏名

7 いろいろな波

例題❶ $y=\sin x$ のグラフをもとにして次のグラフをかく.

(1) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ (2) $y=2\sin x$



例題❷ $y=\sin x$ のグラフをもとにして $y=\sin 2x$ のグラフを上の座標平面にかく.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin 2x$									

問題① $y=\sin 2x$ のグラフを見て, 次の空欄を埋めよ.

(1) $y=\sin 2x$ のグラフは ア ごとに同じ形がくり返される.

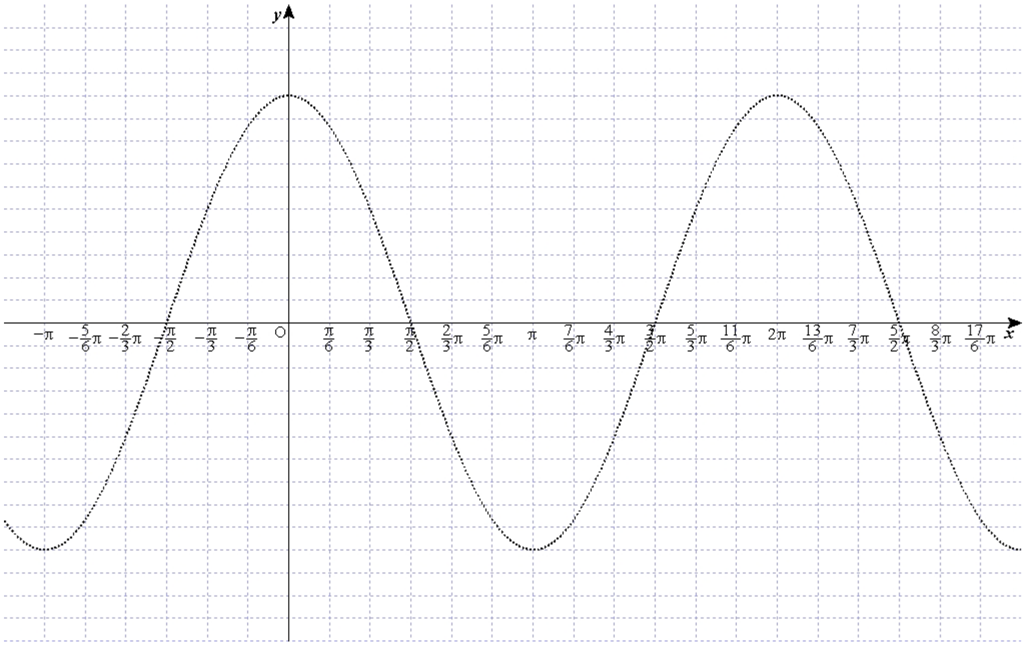
(2) $y=\sin 2x$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に イ 倍に縮小したものである.

一般に, $y=\sin ax$ のグラフの周期は, ウ となる. ✎注 $y=\cos ax$ も同様 である.

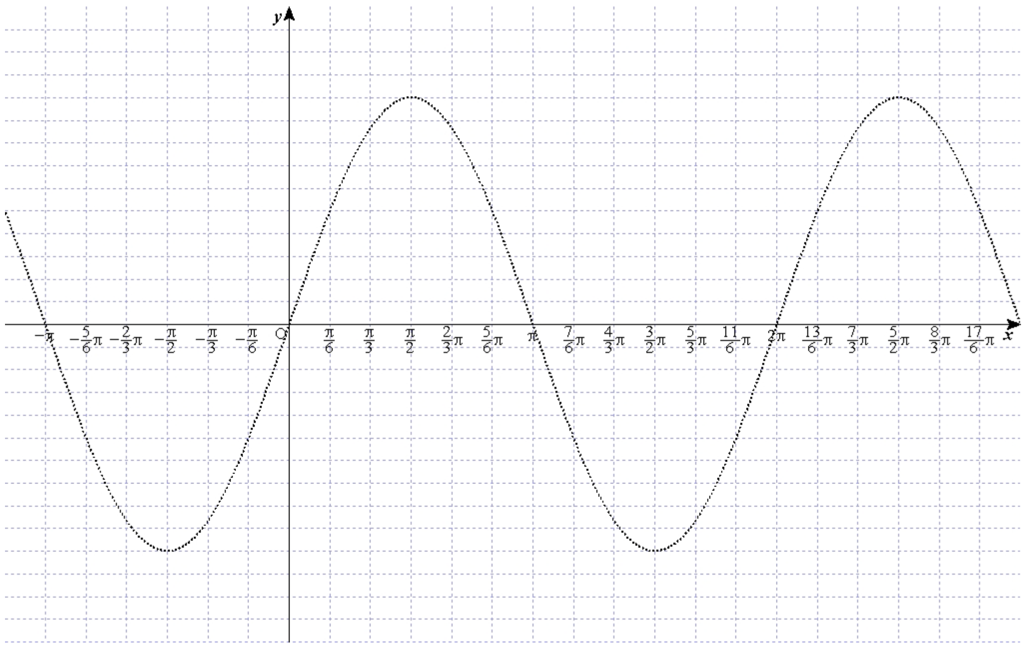
問 題② $y=\sin x$ のグラフをもとにして $y=\sin\dfrac{x}{2}$ のグラフを上の座標平面にかき，その周期を求めよ.

問 題③ $y=\cos x$ のグラフをもとにして次のグラフをかけ.

(1) $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ (2) $y=\dfrac{1}{2}\cos x$ (3) $y=\cos\dfrac{x}{2}$



問 題④ $y=\sin x$ のグラフをもとにして $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかき，その周期を求めよ.



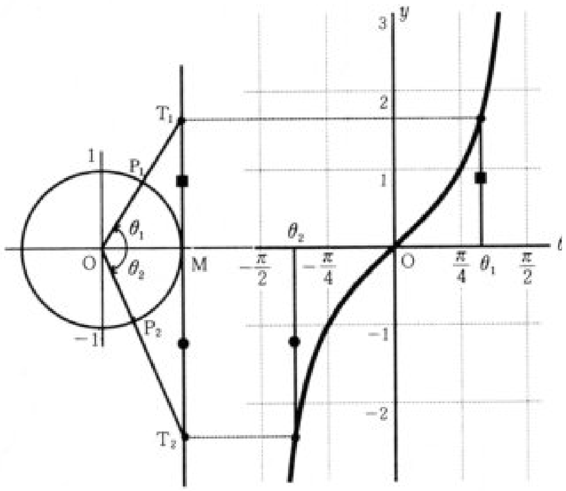
2年　　組　　番　氏名

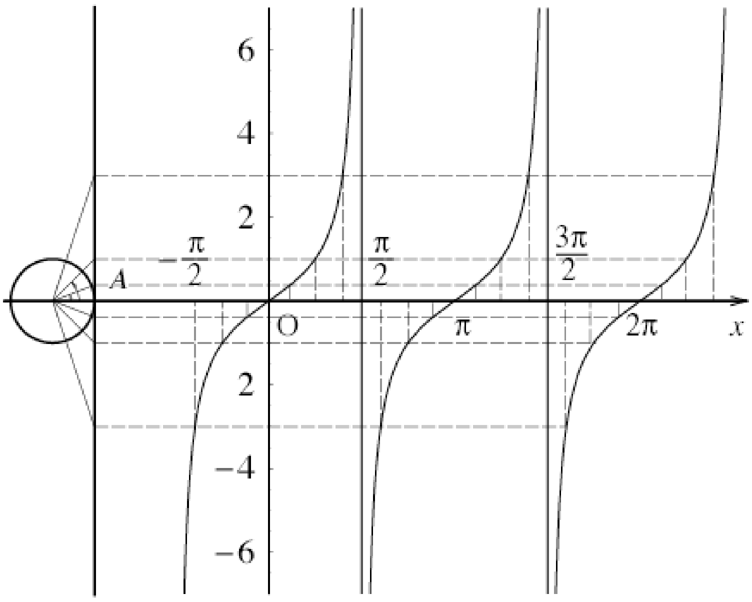
$\boxed{8}$ 波じゃない！？

プリント「$\boxed{6}$ **波はくり返す**」で $y=\sin\theta$ と $y=\cos\theta$ のグラフをかいた．ここでは，もう１つの三角関数 $y=\tan\theta$ のグラフをかいてみよう．

❶ $y=\tan\theta$ のグラフ

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ であるから，$x=1$ とすると $\tan\theta$ の値は直線 $x=1$ 上を動く点の y 座標となる．これを利用すると，次のように $y=\tan\theta$ のグラフをかくことができる．





$\boxed{\text{問 題}}$① $y=\tan\theta$ のグラフを見て，次の空欄を埋めよ．

(1) $y=\tan\theta$ のグラフは $\boxed{\text{ア}\quad}$ ごとに同じ形がくり返される．

⇨**注** 三角関数の性質 ❸（プリント「$\boxed{4}$ **三角関数の性質**」を参照）より，$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ であることが分かる．

(2) $y=\tan\theta$ のグラフは $\boxed{\text{イ}\quad}$ に関して対称である．

$\boxed{\text{参 考}}$ $y=\tan\theta$ も**奇関数**である．

(3) $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$，$\theta=\dfrac{5}{2}\pi$ は，$y=\tan\theta$ のグラフの $\boxed{\text{ウ}\quad}$ になっている．

⇨**注** 一般的には，$\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$（$n$ は整数）が $y=\tan\theta$ のグラフの漸近線になっている．

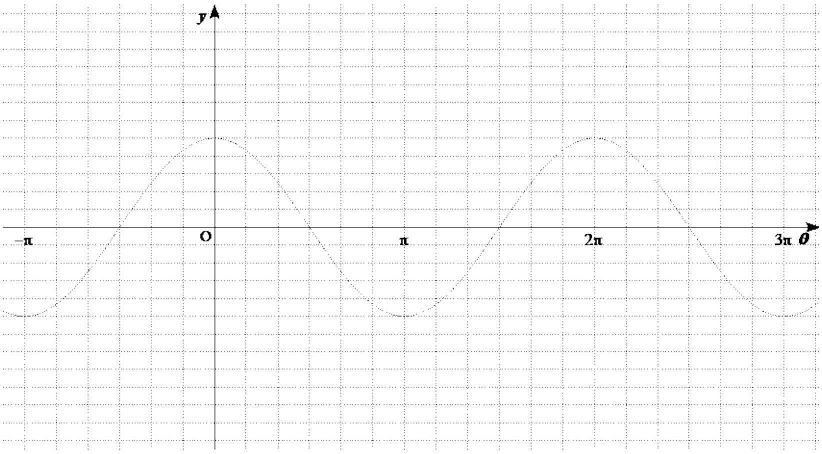
2　三角関数を含む不等式

三角関数のグラフを利用して不等式を解いてみよう.

例題❶　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の範囲を求める.

(1)　$\cos\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　(2)　$\cos\theta > \dfrac{1}{2}$

解　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のときの $y=\cos\theta$ のグラフは次のようになる.



(1)　このグラフが直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ よりも下側にある部分の θ の範囲を求めればよいので,

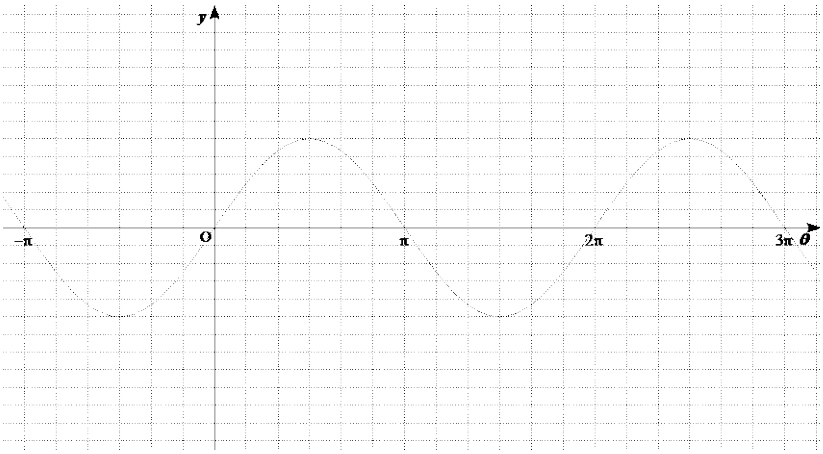
$\boxed{エ\quad} < \theta < \boxed{オ\quad}$

(2)　このグラフが直線 $y=\dfrac{1}{2}$ よりも上側にある部分の θ の範囲を求めればよいので,

$\boxed{カ\quad} < \theta < \boxed{キ\quad}$,　$\boxed{ク\quad} < \theta < \boxed{ケ\quad}$

問題②　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin\theta < -\dfrac{1}{2}$ を満たす θ の範囲を求めよ.

解

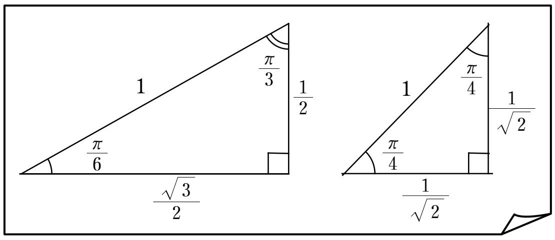


2年　　組　　番　氏名

$\boxed{9}$ 角θの値は？

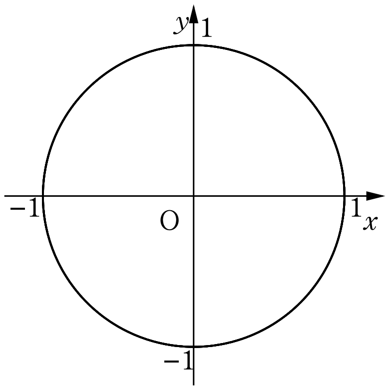
プリント「$\boxed{3}$ **サイン・コサイン・タンジェント**」で与えられた角θから三角関数の値を求めた．ここでは，逆に三角関数の値から角θを求めてみよう．

まず，角θから三角関数の値を求める方法を復習する．



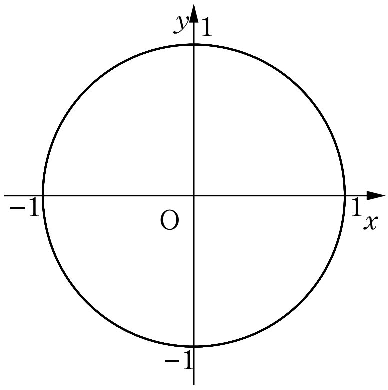
例題❶　$\sin\dfrac{7}{6}\pi$，$\cos\dfrac{7}{6}\pi$ の値を求める．

単位円と $\dfrac{7}{6}\pi$ の動径との交点 P の座標を求める．



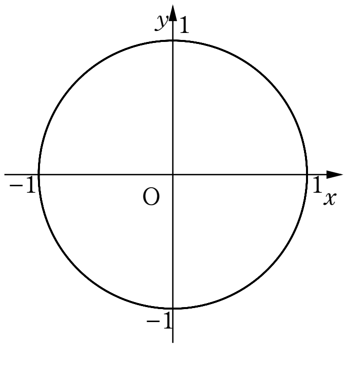
例題❷　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす角θの値を求める．

求める角θは右図の動径 OP，OQ の表す角である．



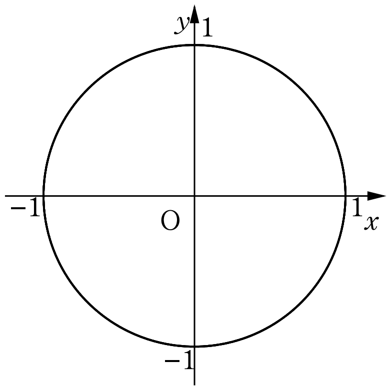
問題①　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす角θの値を求めよ．

解



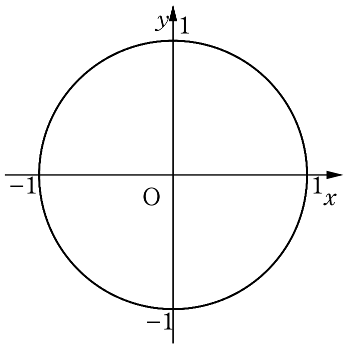
例題❸　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす角 θ の値を求める.

　求める角 θ は右図の動径 OP，OQ の表す角である.



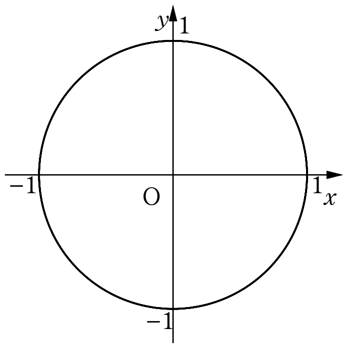
問題②　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす角 θ の値を求めよ.

解

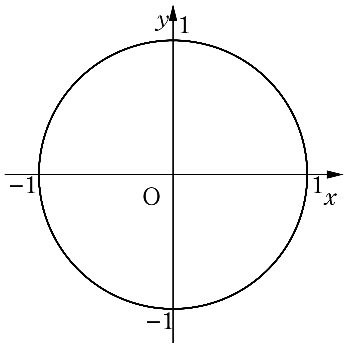


問題③　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

(1)　$2\sin\theta - 1 = 0$



(2)　$\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$



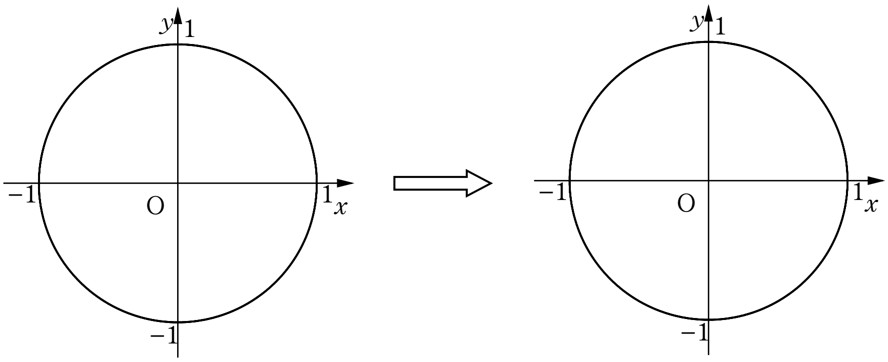
2年　　組　　番　氏名

10 $\cos 15^\circ$の値は？

はじめに，$\cos(\alpha-\beta)$と$\sin\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\alpha$，$\cos\beta$との間に成り立つ等式

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

を証明する．点A，B，A′，B′を下図のようにとる．



参考

$\vec{a}=(a_1, a_2)$，$\vec{b}=(b_1, b_2)$

θ：$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$

加法定理

❶ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

❷ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

例題❶　$\cos 15^\circ$ の値を求める．

解

問題①　加法定理を用いて，次の値を求めよ．

(1)　$\cos 75^\circ =$

(2)　$\sin 105^\circ =$

(3)　$\cos 105^\circ =$

例題❷　$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{15}{17}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$ の値を求めよ．ただし，α は第 1 象限の角，β 第 2 象限の角とする．

解

問題②　**例題❷**の α，β において，次の値を求めよ．

(1)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(2)　$\cos(\alpha+\beta)$　　(3)　$\cos(\alpha-\beta)$

2 年　　組　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

11 2 直線のなす角

加法定理

3 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

例題 1 $\tan 75°$ の値を求める．

解

問題 ① 加法定理を用いて，次の値を求めよ．

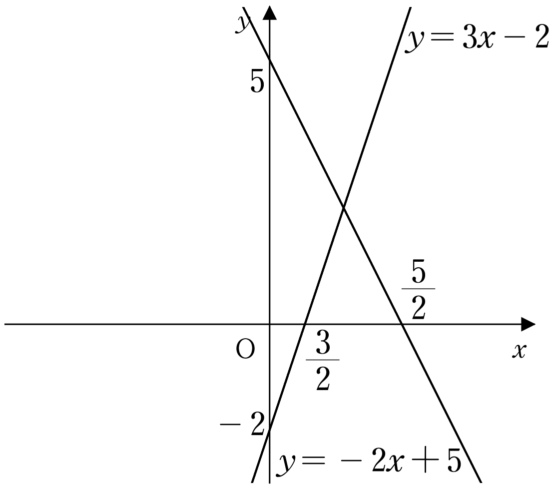
(1) $\tan 15° =$

(2) $\tan 105° =$

問 題② α，βが鋭角で，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$のとき，$\tan(\alpha+\beta)$を計算することによって，$\alpha+\beta$を求めよ．

例 題❷ 2 直線$y=-2x+5$，$y=3x-2$のなす角θを求めよ．

解



$y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$

のなす角をθとすると，

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

問 題③ 2 直線$y=2x+1$，$y=\dfrac{1}{3}x-4$のなす角θを求めよ．

問 題④ 2 直線$y=2x-3$，$y=-x+1$のなす角をθとするとき，$\tan\theta$の値を求めよ．

2 年　　組　　番　氏名

12 $\cos\dfrac{\pi}{8}$ の値は？

加法定理において $\alpha=\beta$ とすると，次の公式が得られる．

2倍角の公式

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
3. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2倍角の公式の 2 は，次の形で利用することがある．

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \quad と \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad \cdots \ (*)$$

例題❶ $\cos\dfrac{\pi}{8}$ の値を求める．

解 $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1-\sin 2\cdot\boxed{}}{2} = \dfrac{1-\boxed{}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1-\boxed{}\right) = \boxed{}$.

ここで，$\dfrac{\pi}{8}$ は第1象限の角であるから，$\cos\dfrac{\pi}{8}\boxed{}0$ となるので

$$\cos\frac{\pi}{8} = \boxed{}.$$

問題① 次の三角関数の値を求めよ．

(1) $\sin\dfrac{\pi}{12}$

(2) $\tan 22.5^\circ$

$(*)$ の式において α を $\dfrac{\alpha}{2}$ で置き換えると，次の半角の公式が得られる．

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

例題❷　α が第 2 象限の角で $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ の値を求めよ．

解

問題②　α が第 1 象限の角で $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ の値を求めよ．

例題❸　α が第 2 象限の角で $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ．

解

問題③　α が第 3 象限の角で $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ．

2 年　　組　　番　氏名 ______________________

13 波が重なると？

水面に石を投げると波紋ができる．さらに別の波紋をつくると2つの波紋は重なり合って新たな波紋が生まれる．三角関数を合成すると，そのグラフはどのような波になるだろうか．

例題1 関数$y=\sin\theta+\cos\theta$のグラフをかけ．

考え方　加法定理$\sin(\theta+\alpha)=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha$を利用する．

解　与式より，

$$y=\sqrt{2}\left(\boxed{}\sin\theta+\boxed{}\cos\theta\right)\quad\cdots\ (1)$$

となるので，$\cos\alpha=\boxed{}$，$\sin\alpha=\boxed{}$を満たすαを求めると，$\alpha=\boxed{}$.

これより，式(1)は

$$y=\sqrt{2}\left(\boxed{}\sin\theta+\boxed{}\cos\theta\right)=\sqrt{2}\left(\cos\boxed{}\sin\theta+\sin\boxed{}\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\boxed{}+\cos\theta\sin\boxed{}\right)$$

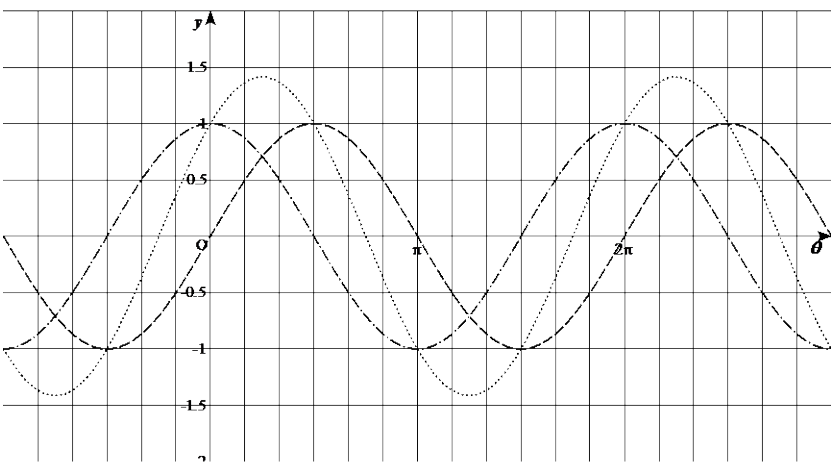
ここで，加法定理より，

$$\sin\theta\cos\boxed{}+\cos\theta\sin\boxed{}=\sin\left(\theta+\boxed{}\right)$$

であるから，

$$y=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\boxed{}\right).$$

よって，関数$y=\sin\theta+\cos\theta$のグラフは$y=\sin\theta$のグラフをθ軸方向に$\boxed{}$にだけ平行移動し，y軸方向に$\boxed{}$倍したものになる．



✎**注**．このような変形を，**三角関数の合成**という．

一般に，次のようにいえる．

三角関数の合成

$$y=a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

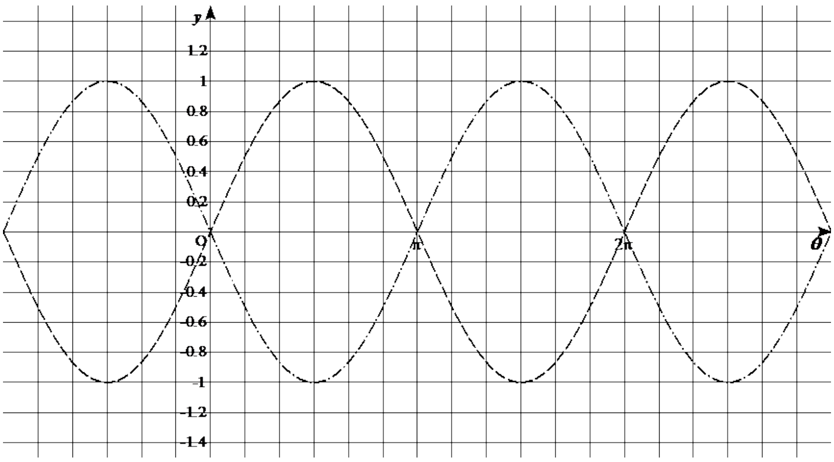
例題❷　関数 $y=3\sin x+4\cos x$ を $y=r\sin(x+\alpha)$ の形に変形せよ．

問題①　次の式を $y=r\sin(x+\alpha)$ の形に変形せよ．

(1)　$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

(2)　$y=5\sin x-2\cos x$

参考　$y=\sin\theta+\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ はどのようなグラフになるだろうか？



2年　　組　　番　氏名

14 和⇄積

積和公式

❶ $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$　❷ $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

❸ $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$　❹ $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

考え方　加法定理を利用して証明する.

問 題 ①　$\cos 22.5°\cos 67.5°$ の値を求めよ.

和積公式において，$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおくことで，次の**積和公式**が得られる.

和積公式

❶ $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　❷ $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

❸ $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　❹ $\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

問題② $\sin 105° - \sin 15°$ の値を求めよ.

例題❶ 方程式 $\cos 3\theta + \cos\theta = 0$ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で解け.

解

問題③ 方程式 $\sin 3\theta + \sin\theta = 0$ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で解け.

2年　　組　　番　氏名