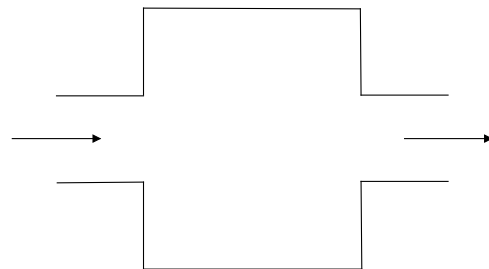


1 ブラックボックス

1 箱の働き

いま、右図のように「入力」したものに対して何かの「働き」をして「出力」する箱を考える。



この箱に次の表の上段のような数を入力したら、下段のような数が出力された。この箱の働きはどのようなものだろうか。

入力 x	1	2	3	4	5	6	7	...
出力 y	4	5	6	7	8	9	10	...

働き $f :$

この箱の働きを式で次のように表すことにする。

$$\boxed{\text{出力されるもの}} = f(\boxed{\text{入力されるもの}})$$

例 (1) $4 = f(1)$ (2) $7 = f(4)$ (3) $10 = f(7)$

この箱に x を入力したとき、 y が出力されるとする。このとき、 y を x の式で表すことを考えよう。

ア

これらより、ウ

イ

2 関数

一般に、『 x (入力) が決まれば対応する y (出力) がただ1つだけ決まる対応の規則』のことを エ という。その規則を式で表したものを オ という。

上の箱の場合でいえば、

関数： カ

関数の式： キ

⇒注. 関数の式を『 $f(x) = x + 3$ 』と書くこともある。

例題① 次の表が表す関数とその式を答えよ.

入力 x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
出力 y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

解 関数：

関数の式：

問題① 次の表が表す関数とその式を答えよ.

入力 x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
出力 y	...	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	...

解 関数：

関数の式：

3 関数のグラフ

例題①の表を見て、座標平面の x 軸（入力）の上に出
力 y を表す向きつきの棒グラフ（矢印）をかいてみよう。

かいた矢印の頭をつなぐと、出力（関数の値）の変化の
仕方が目に見えてくる。

このように、関数の値の変化を目に見えるようにしたも
のをシ という。

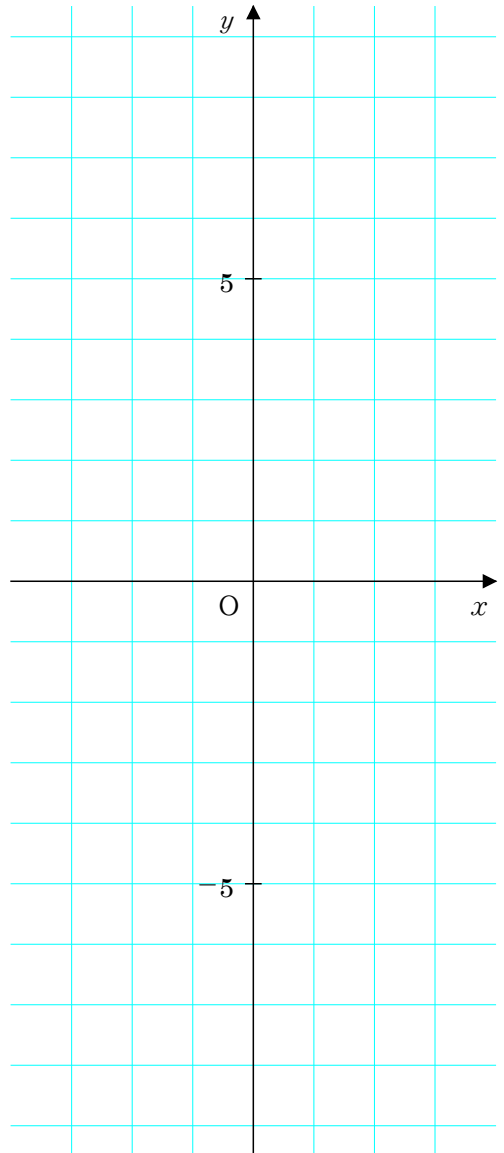
問題② **問題①** の表を見て、座標平面の x 軸の上に
関数の値 y を表す矢印をかけ。また、かいた矢印
の頭をつなぎ関数のグラフをかけ。

参考 この関数のグラフの曲線を『放物線』といい、

例題①のグラフの放物線を『下に凸』

問題①のグラフの放物線を『上に凸』

という。

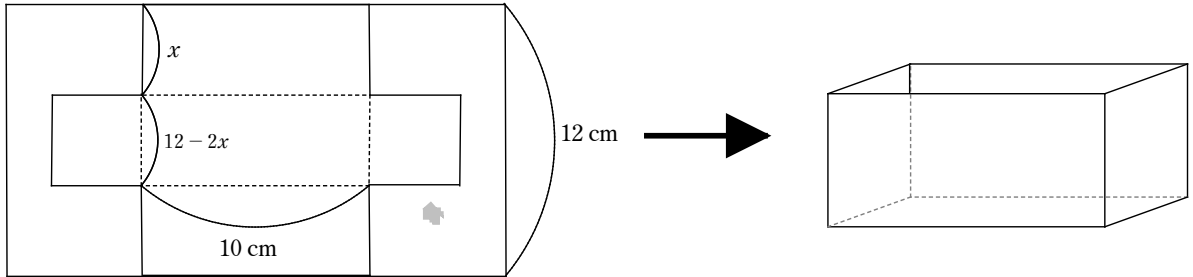


② 箱をつくろう

① 容積最大の箱



幅 12 cm の紙を使って、蓋のない箱をつくりたい。深さ x cm をいくらにすると箱の容積は最大になるだろうか。ただし、箱の長さは 10 cm とする。



深さが x cm のときの容積を y cm³ とする。このとき深さ x が決まれば、容積 y はただ 1 つに決まるので、 x から y への対応は関数となる。では、関数の式はどうなるだろうか。

箱の長さ：10 cm 箱の奥行き：ア cm 箱の高さ：イ cm

$$y = \text{ウ}$$

$$= \text{エ}$$

この関数の式を使って、次の表の空欄を埋めてみよう。

深さ x cm	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
容積 y cm ³					

上の表を見て、矢印をかき、その頭をつないで関数のグラフをかいてみよう。

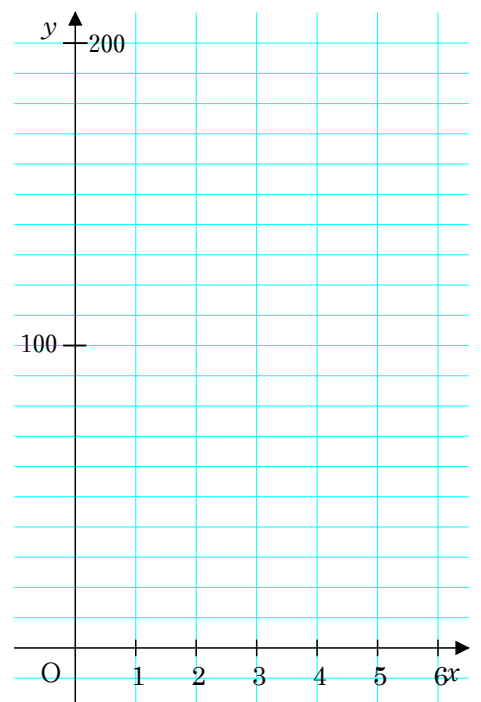
表からもある程度分かるが、グラフを見ることで容積の変化の仕方がよりはっきりと分かるだろう。

この箱の容積を最大にする深さは

オ cm … 答

であり、その最大容積は

カ cm³



2 2次関数

上に出てきた関数の式 $y = -20x^2 + 120x$ は x の2次式である。このように、関数の式が x の2次式になる関数を という。一般に、

の式で表される関数を x の という。

容積最大となる深さを求めるのに の流れで求めた。しかし、 のようにできれば、答えを求めるのが楽になる。

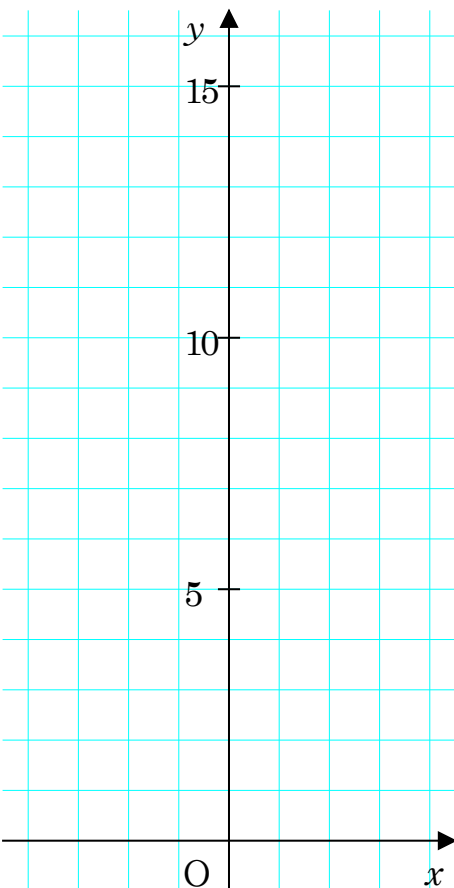
これが2次関数の学習テーマの1つ!

3 2乗に比例する関数

関数の式 $y = x^2$

関数表	入力 x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
	出力 y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...

グラフ



中学校で学習した関数 $y = ax^2$ は2次関数の特別な形である。さらに特別な形である $a=1$ の場合、つまり $y = x^2$ について復習しておこう。

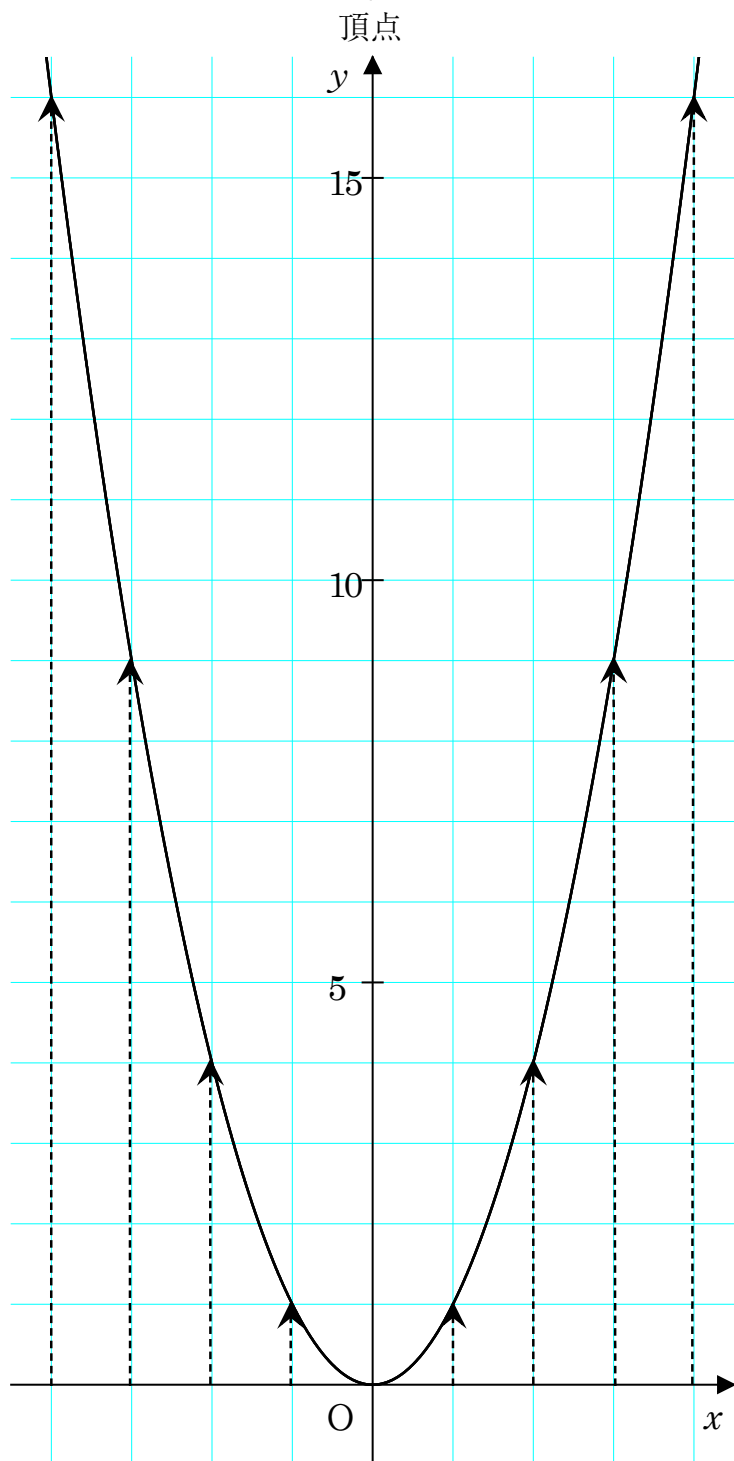
頂点から見た y の変化の仕方に注目しておこう!

3 関数表から大発見！

1 関数表を調べる

例題 1 2次関数 $y = x^2$ の y の値を求め、関数表を完成させよ。また、グラフもかけ。

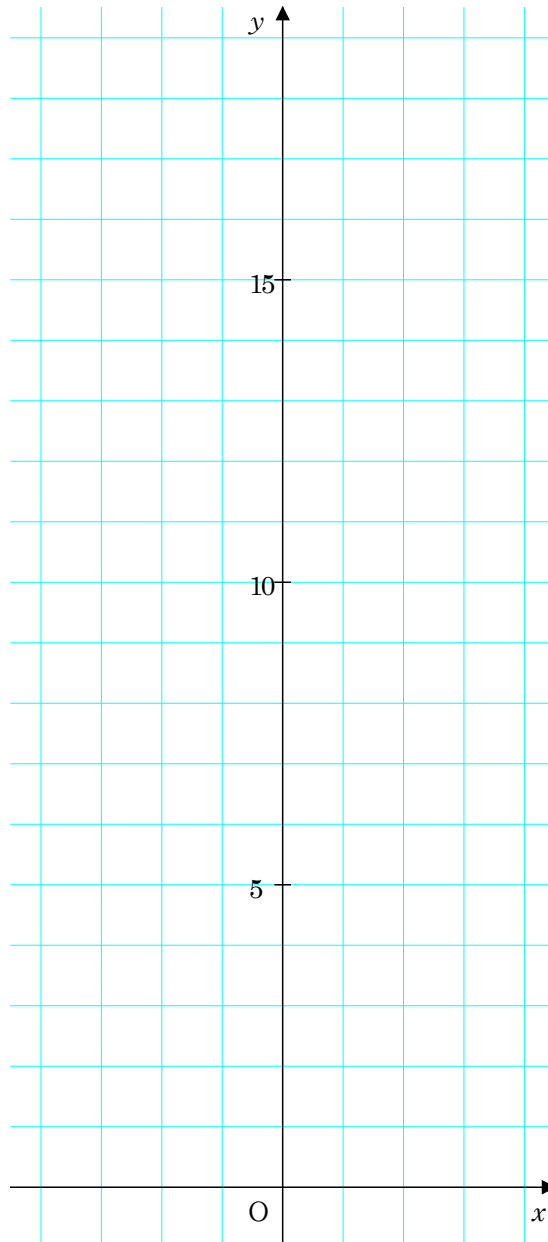
x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...



問題① 次の2次関数の y の値を求め、関数表を完成させよ。また、グラフもかけ。

(1) $y = x^2 + 3$

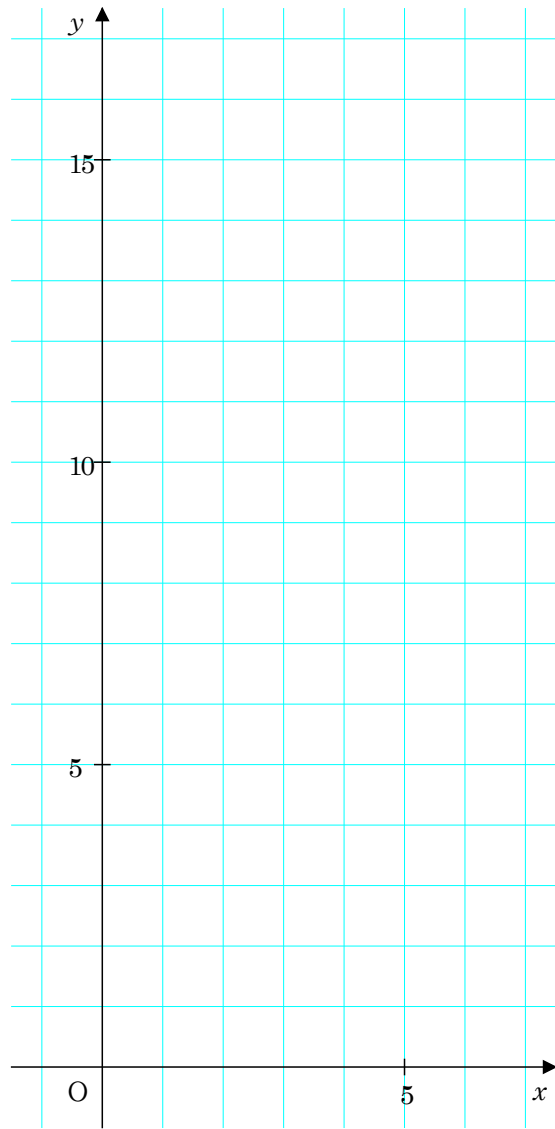
x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
x^2
+3	...	3	3	3	3	3	3	3	3	3	...
y



年 組 番 氏名

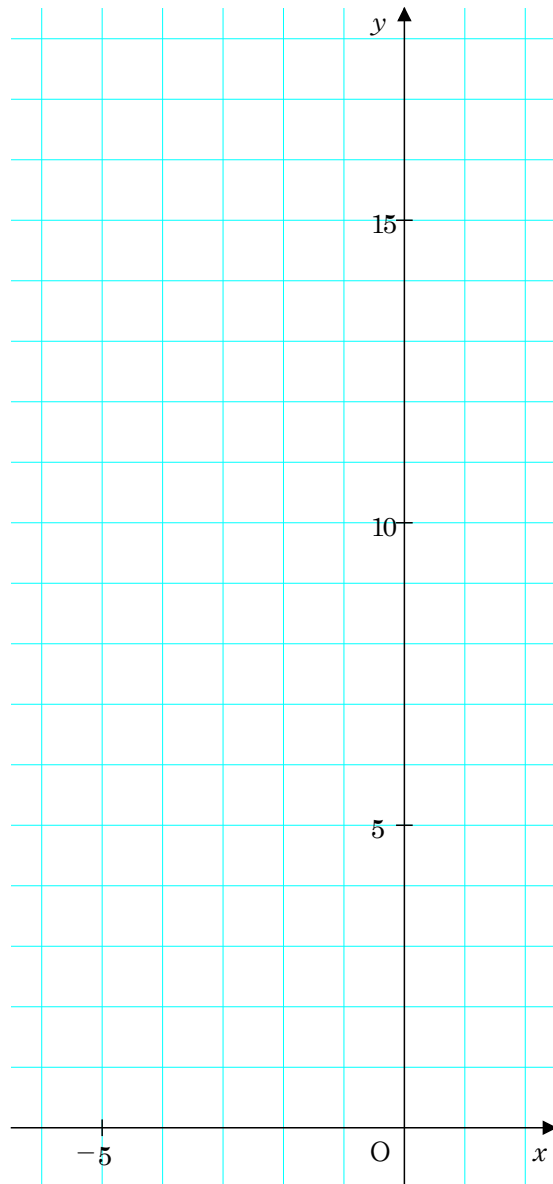
(2) $y = x^2 - 6x + 10$

x	...	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
x^2
$-6x$
$+10$...	10	10	10	10	10	10	10	10	10	...
y



(3) $y = x^2 + 4x + 6$

x	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
x^2
$+4x$
$+6$...	6	6	6	6	6	6	6	6	6	...
y

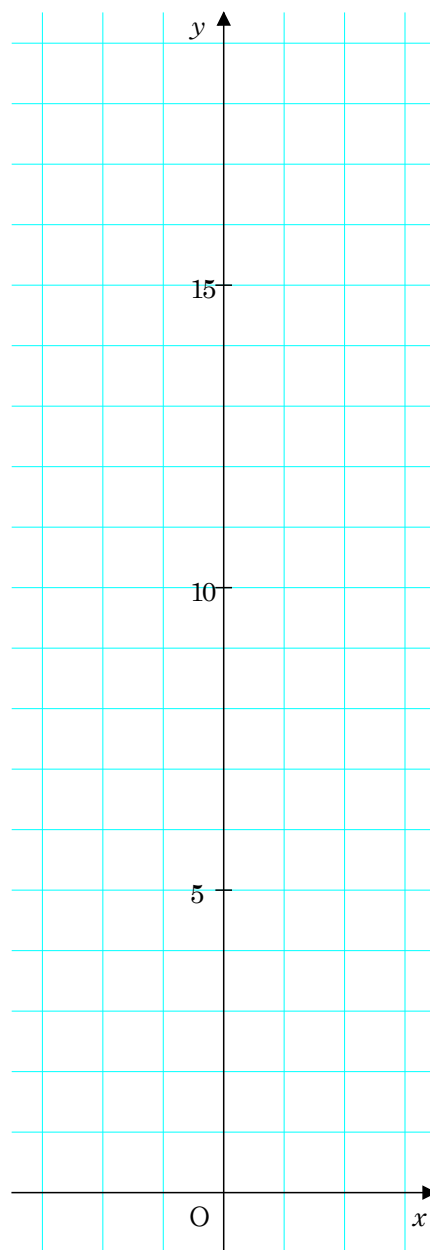


年 組 番 氏名

問題② 次の2次関数の関数表を完成させ、グラフをかけ。また、頂点からの y の値の変化を調べ、関数表の下に書きこめ。

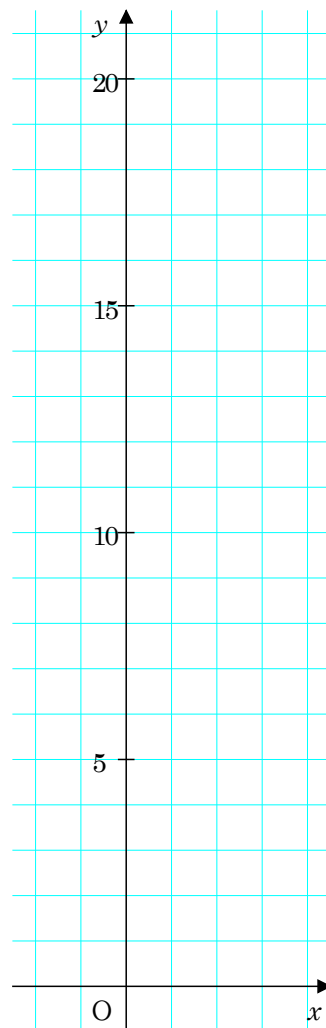
(1) $y = 2x^2$

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
x^2
y



(2) $y = 2x^2 - 4x + 5$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
x^2
$2x^2$
$-4x$
$+5$
y



年 組 番 氏名

2 乗の a 倍変化

上の **問題**① と **問題**② の結果から、次のことが分かる。

2 次関数の式が のとき ⇒注. x^2 の係数が 1 ということ

頂点から x が 1 or -1 変化すると、 y は	イ	変化する
頂点から x が 2 or -2 変化すると、 y は	ウ	変化する
頂点から x が 3 or -3 変化すると、 y は	エ	変化する
頂点から x が 4 or -4 変化すると、 y は	オ	変化する
⋮	⋮	

2 次関数の式が のとき ⇒注. x^2 の係数が 2 ということ

頂点から x が 1 or -1 変化すると、 y は	キ	変化する
頂点から x が 2 or -2 変化すると、 y は	ク	変化する
頂点から x が 3 or -3 変化すると、 y は	ケ	変化する
頂点から x が 4 or -4 変化すると、 y は	コ	変化する
⋮	⋮	

この値は、1, 4, 9, 16, ... の 倍
になっている、

問題③ 次の 2 次関数では、グラフは頂点からどのように変化していくと考えられるか。

(1) $y = 3x^2 + bx + c$ ⇒注. x^2 の係数が 3 ということ

(2) $y = -x^2 + bx + c$ ⇒注. x^2 の係数が -1 ということ

一般に、2次関数の式が のとき

頂点から x が 1 or -1 変化すると、 y は 変化する

頂点から x が 2 or -2 変化すると、 y は 変化する

頂点から x が 3 or -3 変化すると、 y は 変化する

頂点から x が 4 or -4 変化すると、 y は 変化する

⋮

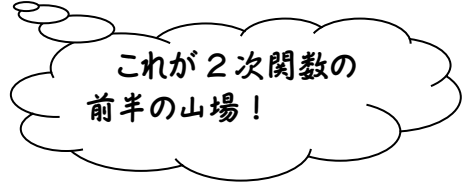
頂点から x が h 変化すると、 y は 変化する

⋮

この値は、1, 4, 9, 16, ... の 倍
 になっている、

以上のことから、2次関数のグラフは と の値が分かれば関数表をつくらなくてもかけることが分かる。

これからは、関数の式から頂点の座標を求める方法を考えていこう。

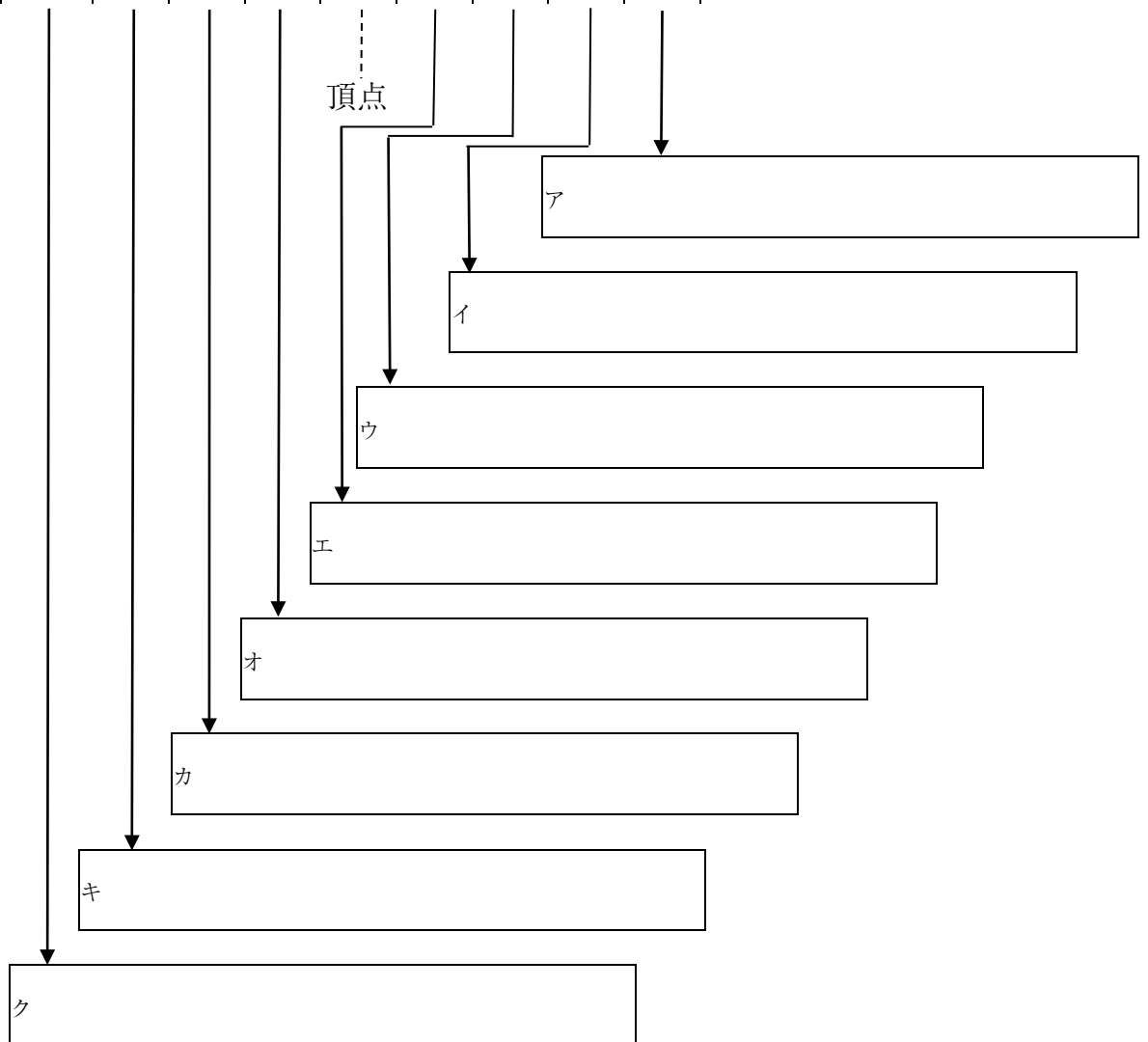


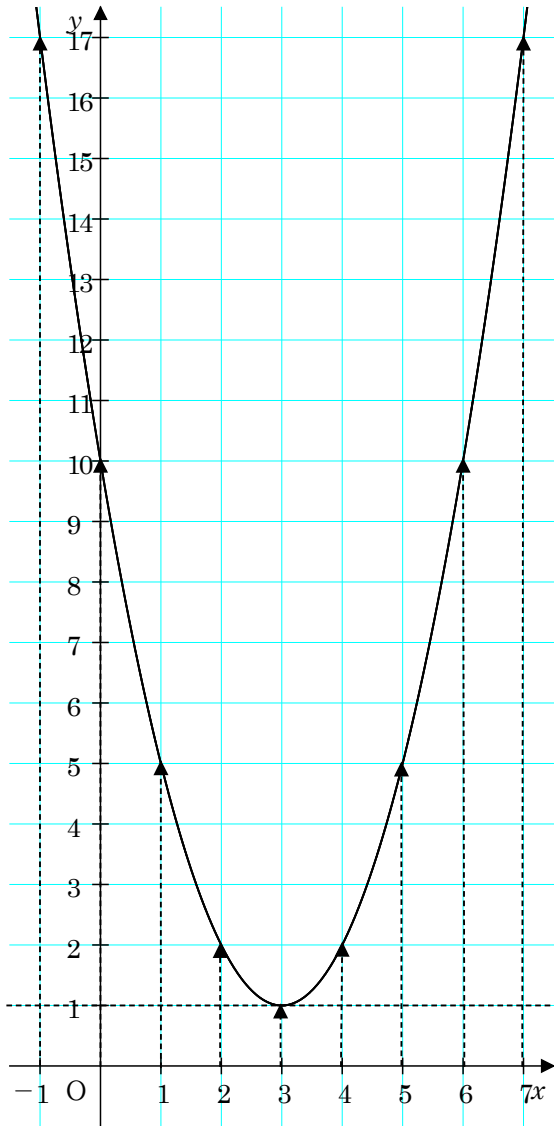
4 頂点を見つけよう！

1 頂点

2次関数 $y = x^2 - 6x + 10$ のグラフの頂点について考えよう。

x	...	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
x^2											
$-6x$											
$+10$											
y	...					1					...





左の表にはないが、 x が10のときの y の値はどのように求められるだろうか。

ケ

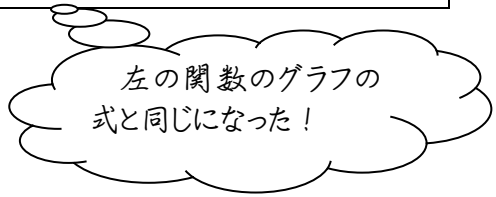
一般的な x からどのように y の値を求めることができるか、上の y の値の求め方を参考に考えてみよう。

コ

サ

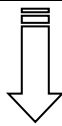
この式を展開すると、次のようになる。

シ



つまり、...

ス



この式変形ができれば、『頂点の座標』が分かる。

セ

一般に、関数の式が \square のとき、

タ

となる x の値が『頂点の x 座標』

⇒注. ()の中が0になる x ということ

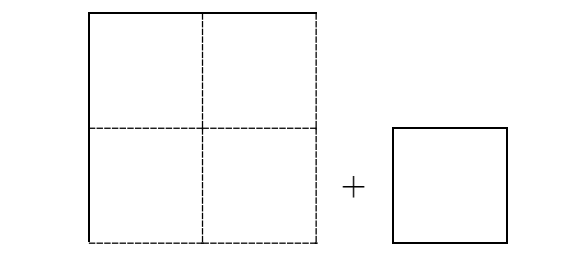
チ

が『頂点の y 座標』

2 平方完成が見えてくる

2次関数の式 $y = x^2 - 6x + 10$ を $y = (x-3)^2 + 1$ の形に変形（この変形のことを『平方完成』という）する方法を考えよう。

$y = (x-3)^2 + 1$ を次のように展開してみる。



これより $y = x^2 - 6x + 10$ を平方完成するには、次の手順を踏めばよいことが分かる。

手順①：

手順②：

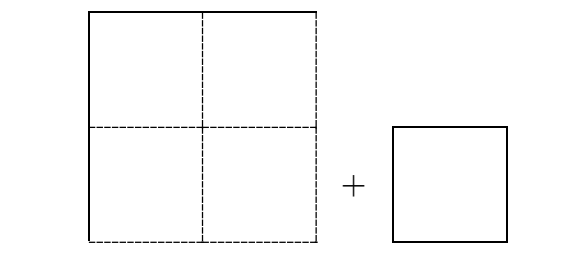
手順③：

手順④：

手順⑤：

手順⑥：

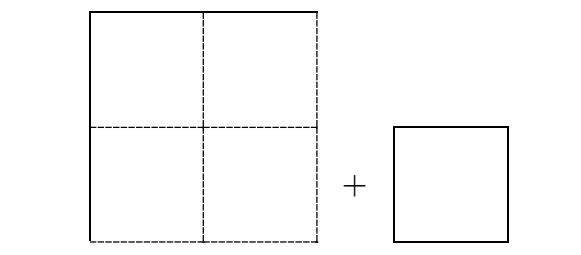
頂点の座標：（ ， ）



例題 1 次の2次関数の式を平方完成せよ。

(1) $y = x^2 + 8x + 3$

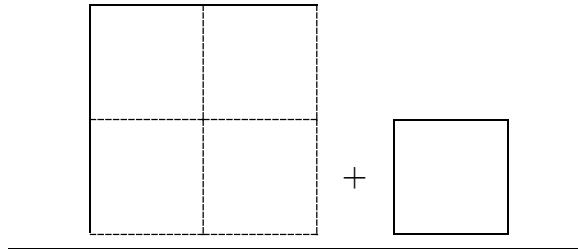
解 $y = x^2 + 8x + 3 =$



頂点の座標：（ ， ）

(2) $y = x^2 - 5x + 7$

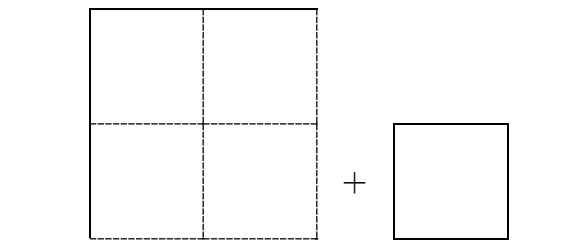
解 $y = x^2 - 5x + 7 =$

頂点の座標： (\quad , \quad)

問題① 次の2次関数の式を平方完成せよ.

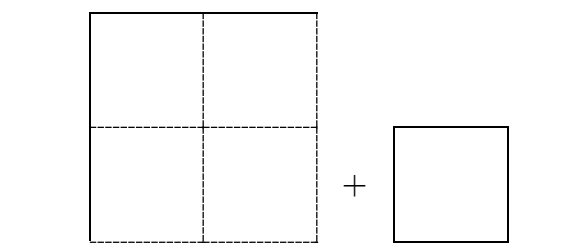
(1) $y = x^2 - 4x + 10$

解 $y = x^2 - 4x + 10 =$

頂点の座標： (\quad , \quad)

(2) $y = x^2 + 3x + 4$

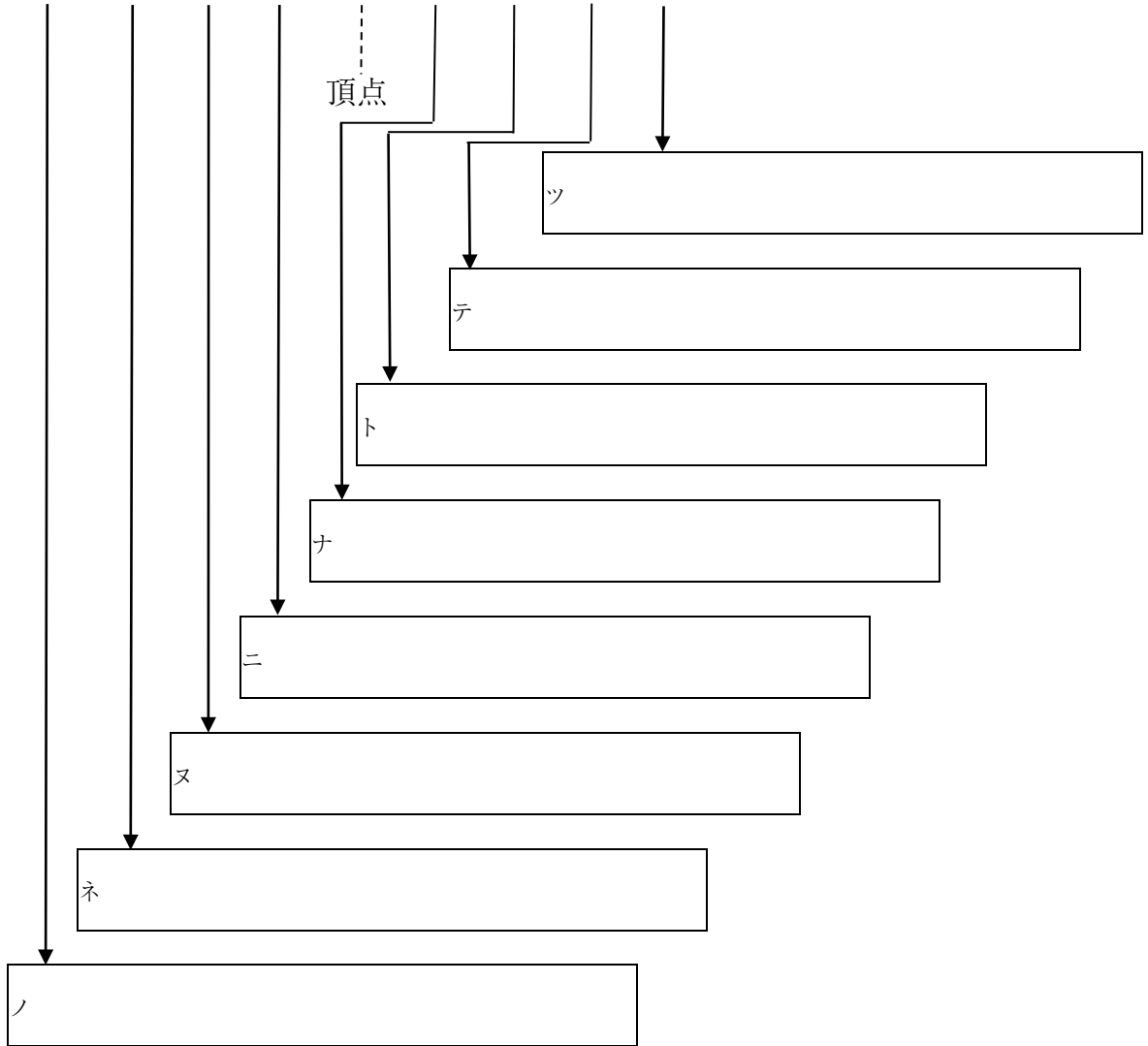
解 $y = x^2 + 3x + 4 =$

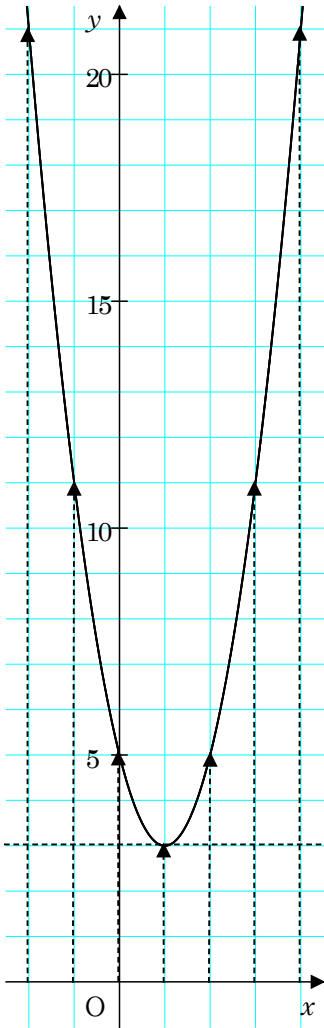
頂点の座標： (\quad , \quad)

3 頂点 (続き)

2次関数 $y = 2x^2 - 4x + 5$ のグラフの頂点について考えよう.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$2x^2$											
$-4x$											
$+5$											
y	...					3					...



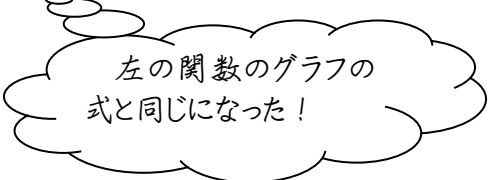


一般的な x からどのように y の値を求めることができるか、考えてみよう。

ハ

この式を展開すると、次のようになる。

ヒ



一般に、関数の式が

フ

のとき、

ヘ

となる x の値が『頂点の x 座標』

注. () の中が 0 になる x ということ

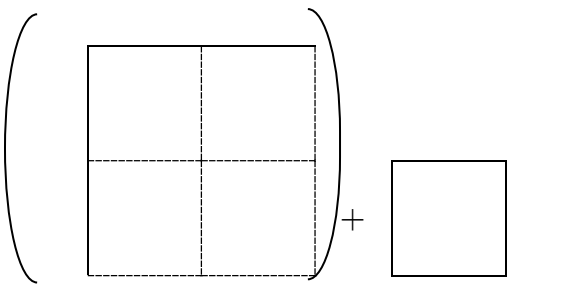
ホ

が『頂点の y 座標』

4 平方完成が見えてくる (続き)

2 次関数の式 $y = 2x^2 - 4x + 5$ を $y = 2(x-1)^2 + 3$ の形に平方完成するには、次の手順を踏めばよい。

手順①：



手順②：

手順③：

手順④：

手順⑤：

手順⑥：

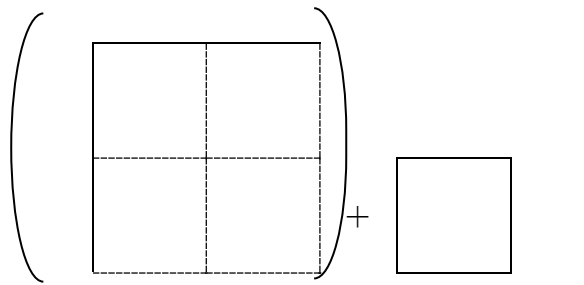
手順⑦：

頂点の座標：(,)

例題② 次の2次関数の式を平方完成せよ.

(1) $y = 2x^2 + 8x + 5$

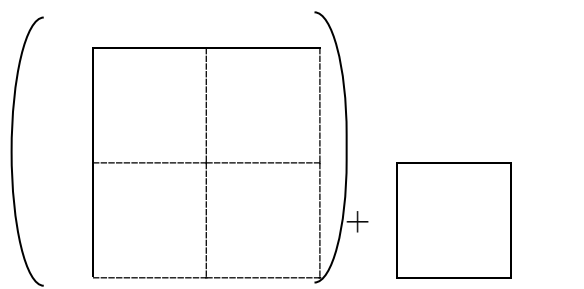
解 $y = 2x^2 + 8x + 5 =$



頂点の座標: (,)

(2) $y = -x^2 + 10x + 7$

解 $y = -x^2 + 10x + 7 =$

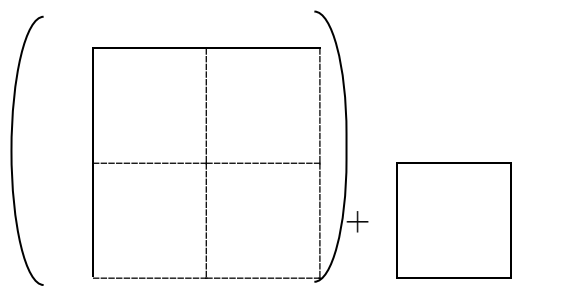


頂点の座標: (,)

問題② 次の2次関数の式を平方完成せよ.

(1) $y = 2x^2 + 4x + 1$

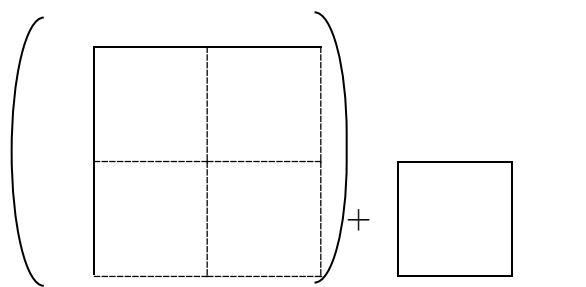
解 $y = 2x^2 + 4x + 1 =$



頂点の座標: (,)

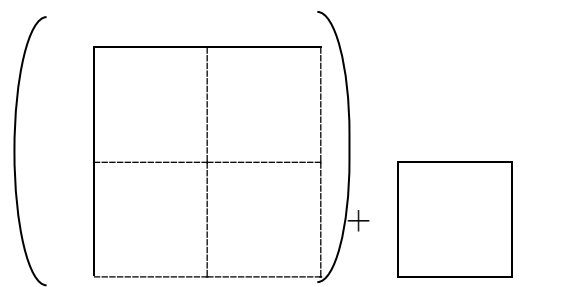
(2) $y = 3x^2 - 12x - 2$

解 $y = 3x^2 - 12x - 2 =$

頂点の座標： (\quad , \quad)

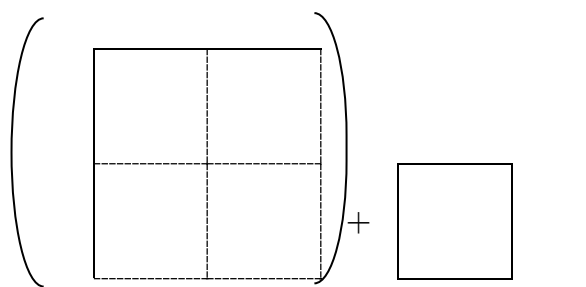
(3) $y = -2x^2 - 6x - 5$

解 $y = -2x^2 - 6x - 5 =$

頂点の座標： (\quad , \quad)

(4) $y = 2x^2 + 8x + 8$

解 $y = 2x^2 + 8x + 8 =$

頂点の座標： (\quad , \quad)

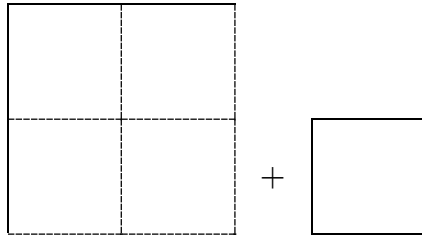
5 グラフをかこう！

1 グラフのかき方

例題 1 次の2次関数のグラフをかけ.

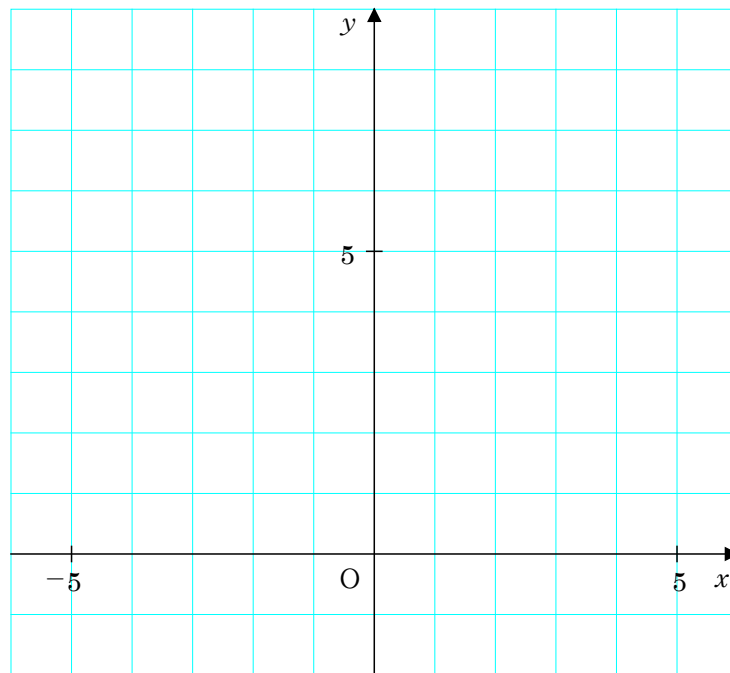
(1) $y = x^2 - 4x + 5$

解 $y = x^2 - 4x + 5 =$



頂点の座標：(,)

軸の方程式：



参考

(1) $y = x^2 + 0x + \Delta$ のとき, y の値の変化は

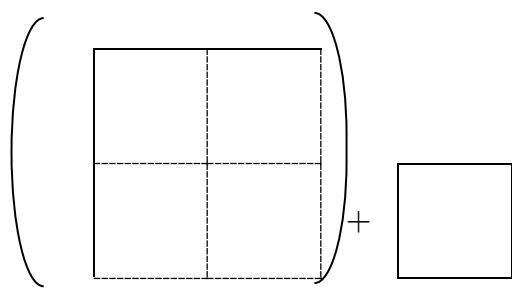
1, 4, 9, 16, ……

(2) $y = ax^2 + 0x + \Delta$ のとき, y の値の変化は

$1 \times a, 4 \times a, 9 \times a, 16 \times a, \dots$

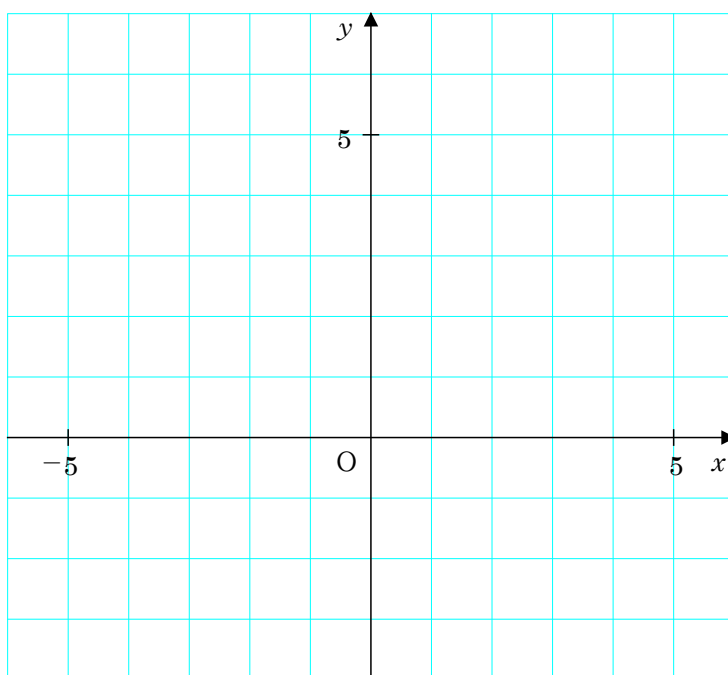
(2) $y = -2x^2 - 4x + 3$

解 $y = -2x^2 - 4x + 3 =$



頂点の座標: (,)

軸の方程式:



一般に、関数の式が

ア のとき、

イ となる x の値が『頂点の x 座標』

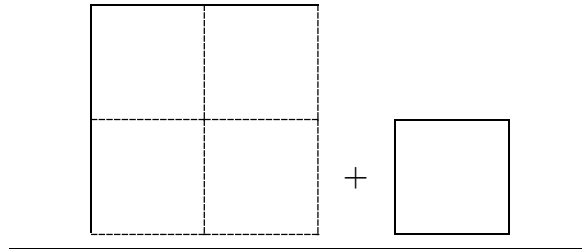
⇒注. () の中が 0 になる x ということ

ウ が『頂点の y 座標』

エ が『軸の方程式』 ⇒注. 頂点の x 座標と同じ数値ということ

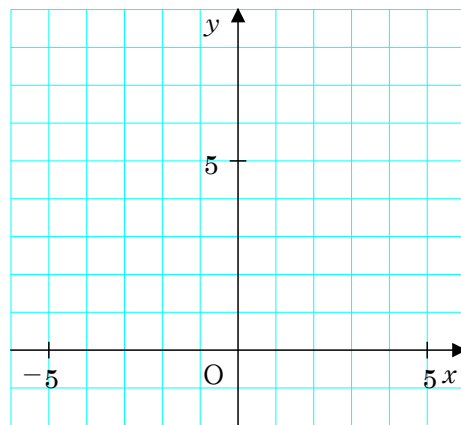
問題① 次の2次関数のグラフをかけ.

(1) $y = x^2 - 4x + 3$

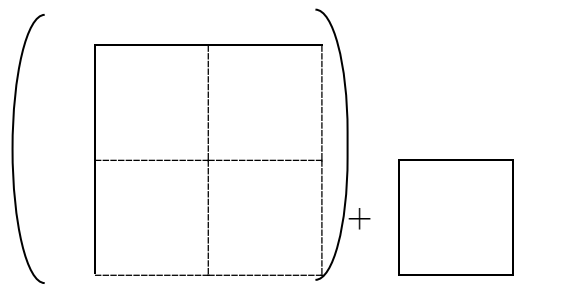


頂点の座標：(,)

軸の方程式：

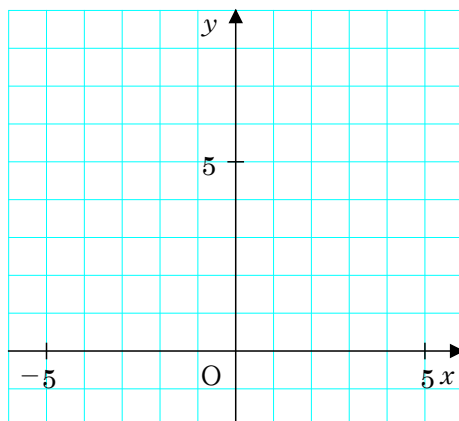


(2) $y = 2x^2 + 4x + 3$

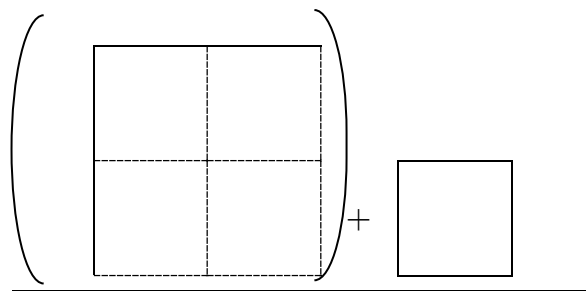


頂点の座標：(,)

軸の方程式：

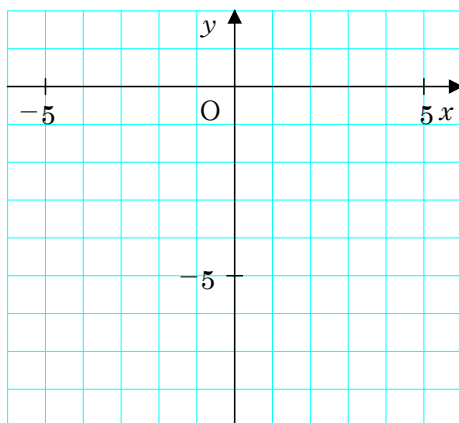


(3) $y = -2x^2 - 8x - 9$

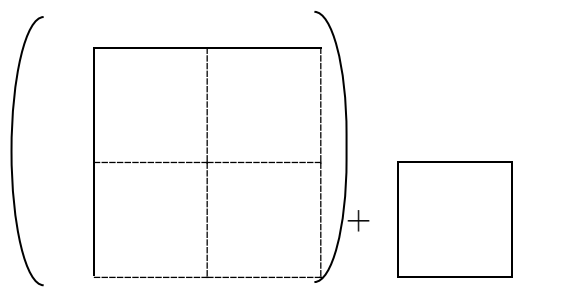


頂点の座標：(,)

軸の方程式：

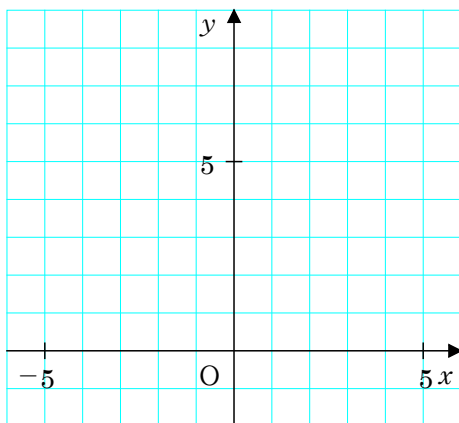


(4) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$



頂点の座標：(,)

軸の方程式：

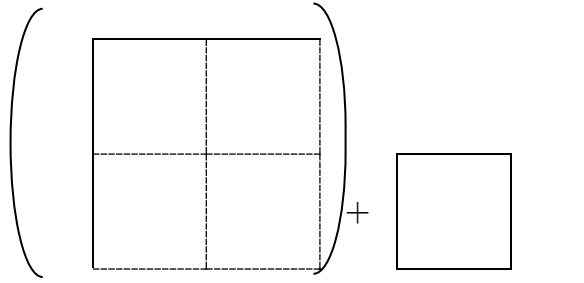


年 組 番 氏名

例題 2 次の2次関数のグラフをかけ.

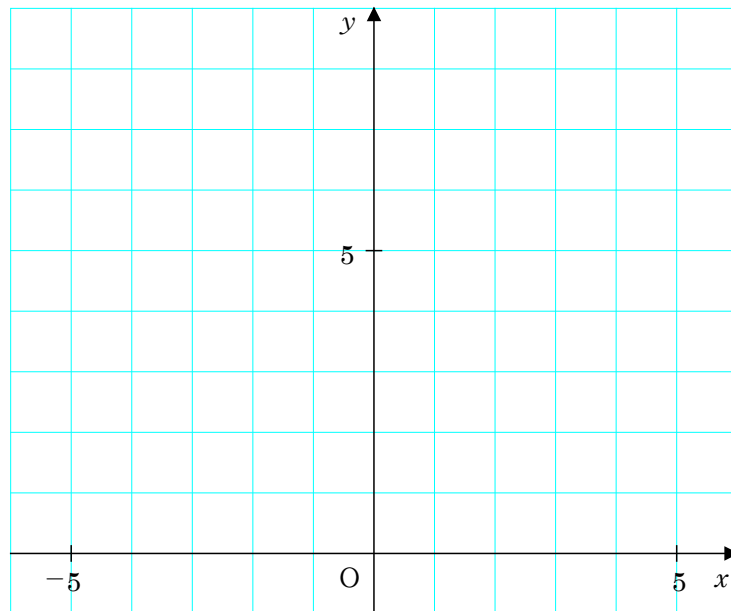
(1) $y = 2x^2 - 12x + 18$

解 $y = 2x^2 - 12x + 18 =$



頂点の座標: (,)

軸の方程式:



一般に、関数の式が

オ のとき,

カ となる x の値が『頂点の x 座標』

⇒注. () の中が 0 になる x ということ

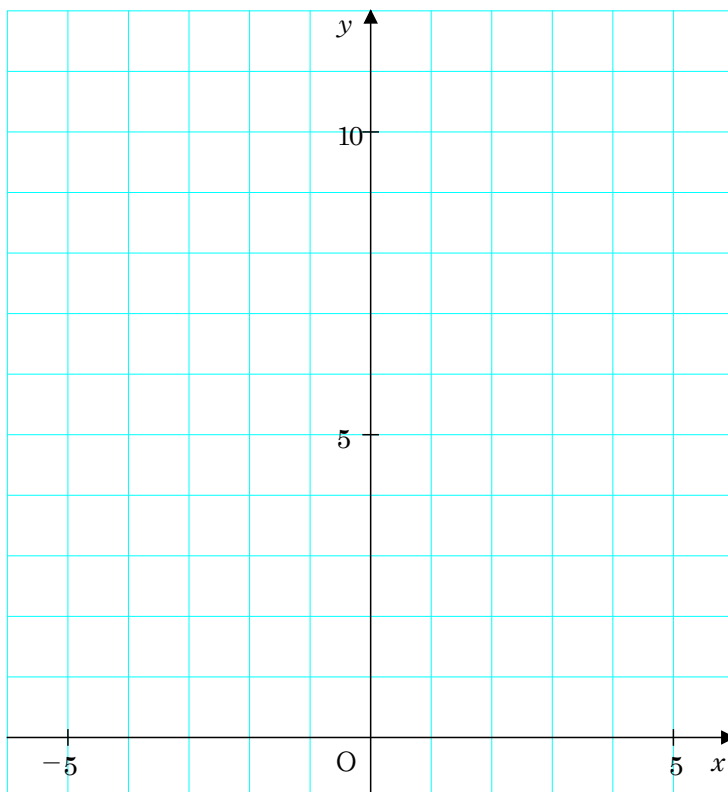
キ が『頂点の y 座標』 ⇒注. 頂点の y 座標は 0 になるということ

ク が『軸の方程式』 ⇒注. 頂点の x 座標と同じ数値ということ

(2) $y = 2x^2 + 4$

解 $y = 2x^2 + 4 =$

頂点の座標：(,) 軸の方程式：



一般に、関数の式が

ケ

 のとき、

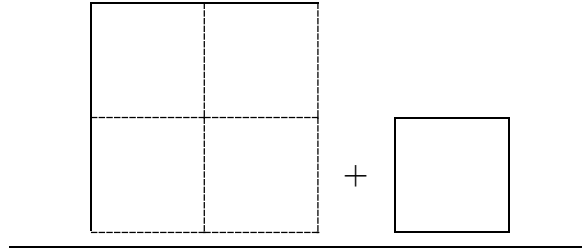
コ	が『頂点の x 座標』	⇒注. 頂点の x 座標は 0 になるということ
---	---------------	----------------------------

サ	が『頂点の y 座標』
---	---------------

シ	が『軸の方程式』	⇒注. 頂点の x 座標と同じ数値ということ
---	----------	--------------------------

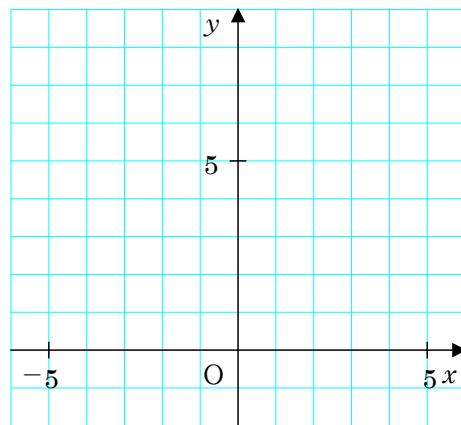
問題② 次の2次関数のグラフをかけ.

(1) $y = x^2 - 4x + 4$

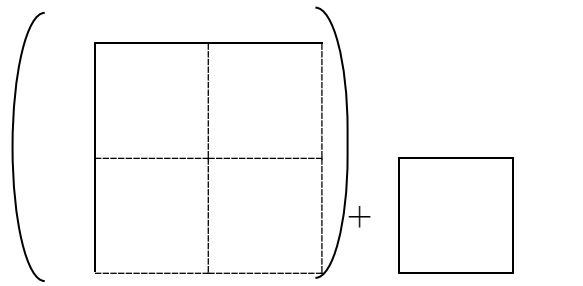


頂点の座標：(,)

軸の方程式：

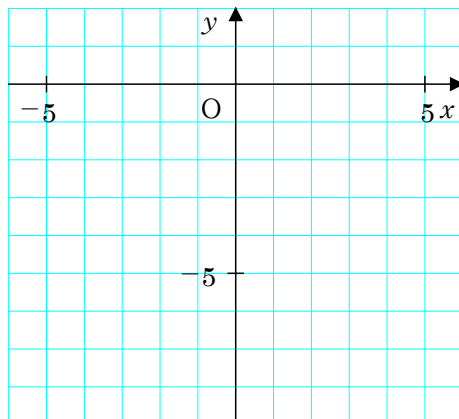


(2) $y = -2x^2 - 12x - 18$

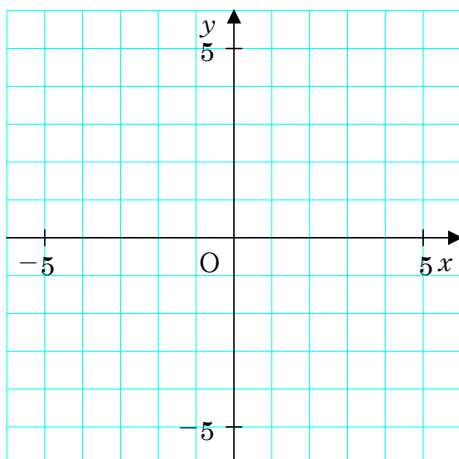


頂点の座標：(,)

軸の方程式：



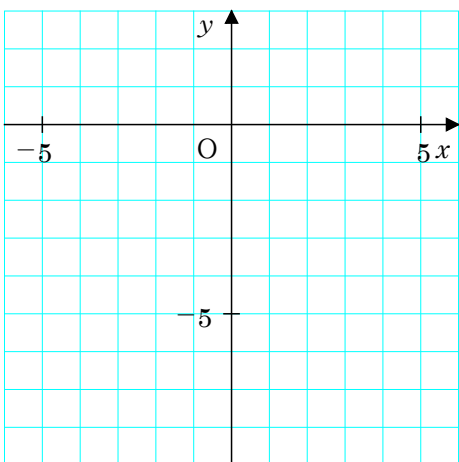
(3) $y = 2x^2 - 4$



頂点の座標：(,)

軸の方程式：

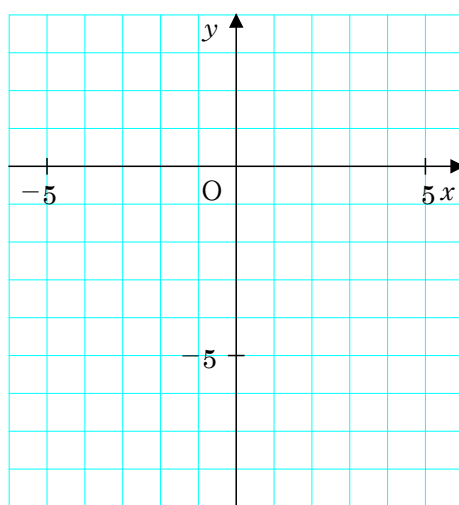
(4) $y = -x^2 + 2$



頂点の座標：(,)

軸の方程式：

(4) $y = -2(x+2)^2 + 3$



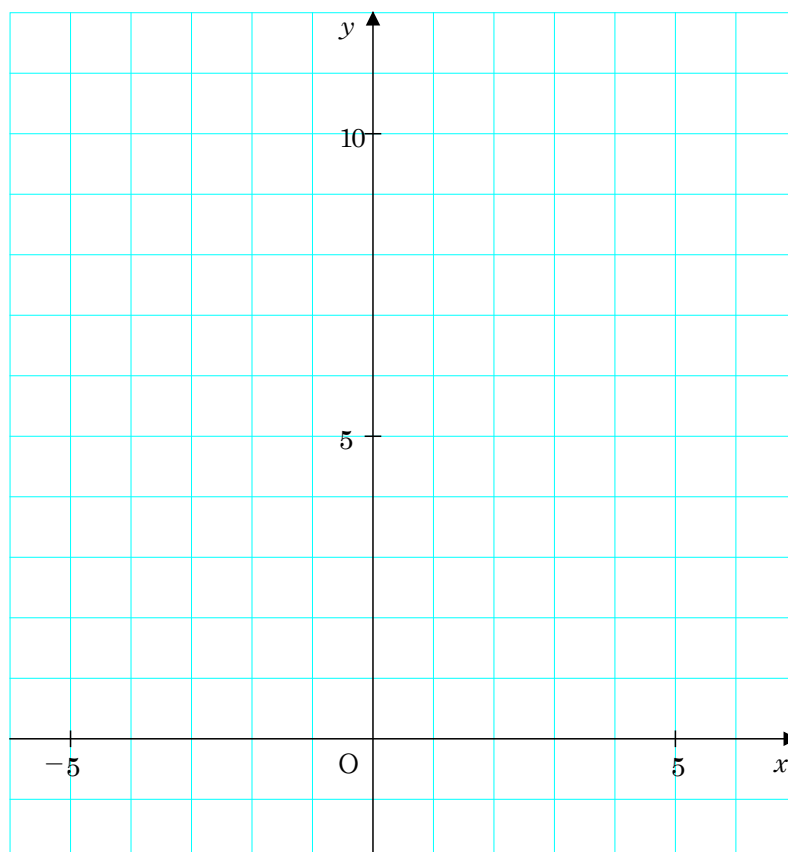
頂点の座標：(,)

軸の方程式：

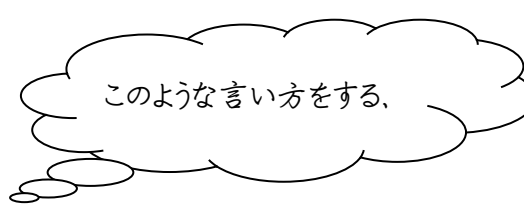
2 グラフの平行移動

グラフなどの図形を、一定の方向に一定の距離だけ動かす移動を と
いう。 ⇒注. 形と向きを変えずに、位置だけ変える移動のだけということ

2次関数 $y = x^2$ と $y = (x-4)^2 + 2$ ($y = x^2 - 8x + 18$) のグラフをかいてみよう。



「 $y = (x-4)^2 + 2$ ($y = x^2 - 8x + 18$) のグラフ」は「 $y = x^2$ のグラフ」を



だけ平行移動したものになっている。

一般に、 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを

だけ平行移動したものになっている。 ⇒注. 頂点の座標を見ればよい

例題③ 2次関数 $y = 2x^2$ のグラフを、頂点が $(-2, -5)$ になるように平行移動した放物線をグラフとする2次関数を求めよ.

解

問題③ 2次関数 $y = 2x^2$ のグラフを、頂点が次の点になるように平行移動した放物線をグラフとする2次関数を求めよ.

(1) $(4, 2)$

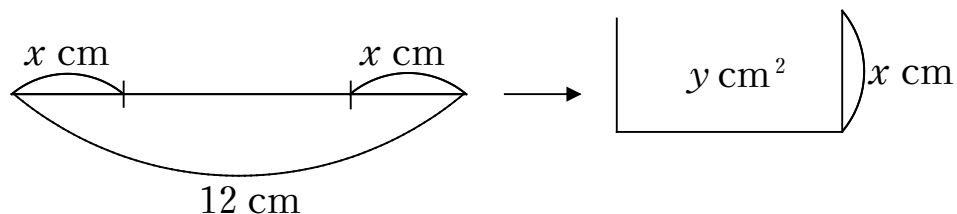
(2) $(7, -3)$

(3) $(-3, 5)$

6 最大と最小

1 溝の深さ

幅 12 cm の銅板を折り曲げて、深さ x cm の溝をつくる。溝の断面積 y cm² を最大にするには、 x をいくらにすればよいか。また、そのときの y の値を求めよ。



溝の深さ： cm 溝の底の幅： cm

$$y = \text{ウ}$$

$$= \text{エ}$$

$$= \text{オ}$$

深さや底の幅は正であるから

,

すなわち

よって、グラフは右図のようになるので、

$x = \text{ケ}$ のとき、

y は最大値 をとる。

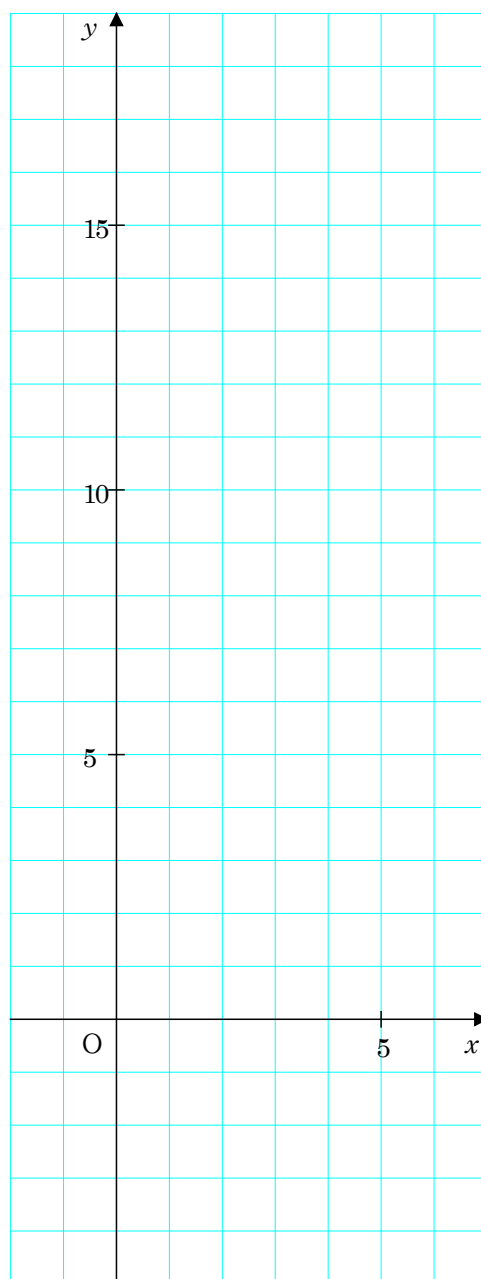
用語解説

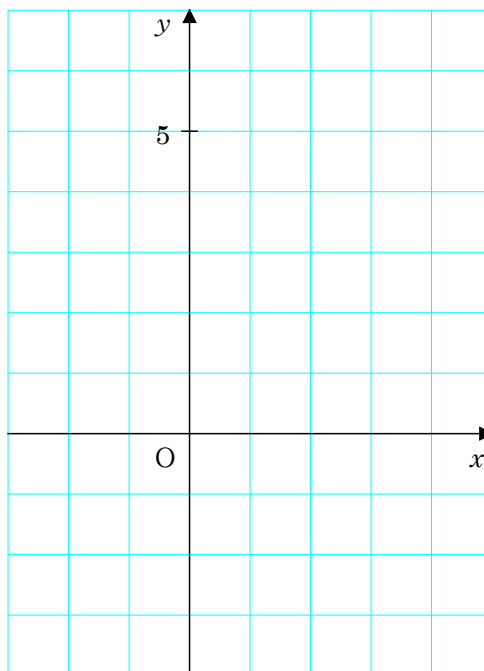
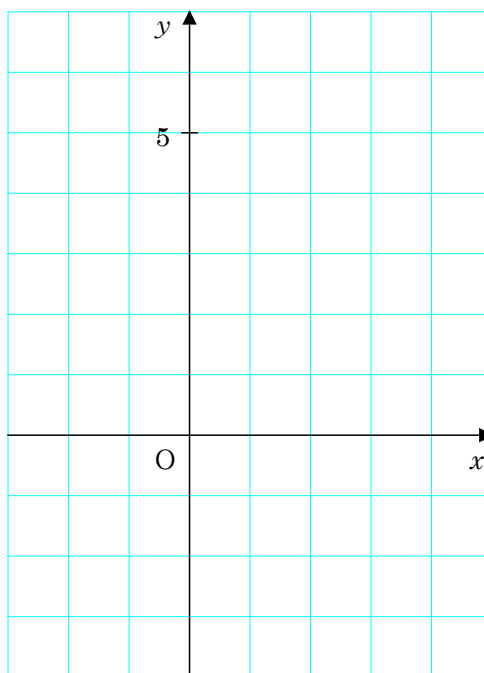
関数において、

変数 x のとる値の範囲を

対応する y のとる値の範囲を

という。

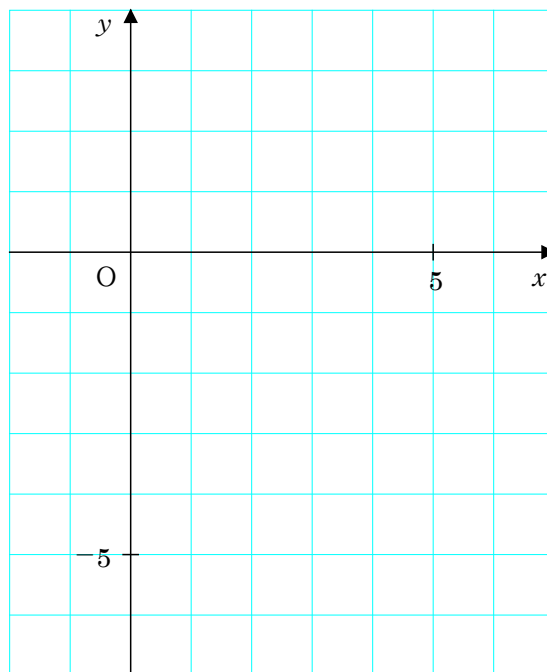


2 定義域が限られたときの最大・最小**例題**① 2次関数 $y = x^2 - 2x - 2$ ($-2 \leq x \leq 3$) の最大値と最小値を求めよ.**考え方** 与えられた定義域におけるグラフをかく.**解****問題**① 2次関数 $y = -2x^2 + 4x + 3$ ($-2 \leq x \leq 2$) の最大値と最小値を求めよ.

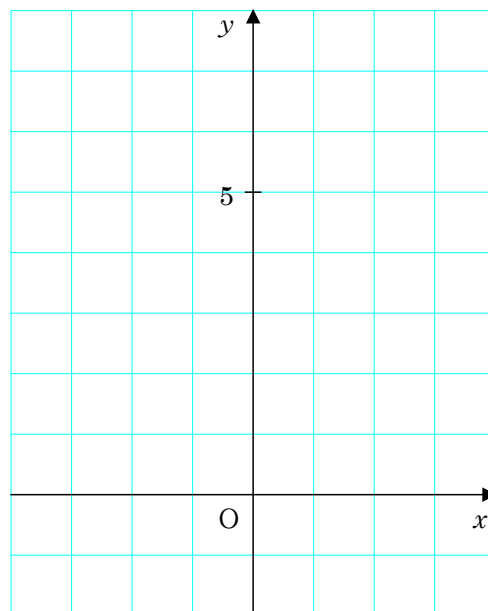
例題② 2次関数 $y = -x^2 + 6x - 6$ ($4 \leq x \leq 6$)の最大値と最小値を求めよ.

考え方 与えられた定義域におけるグラフをかく.

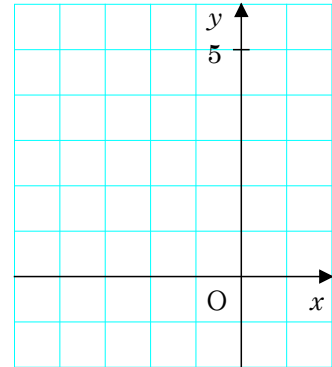
解



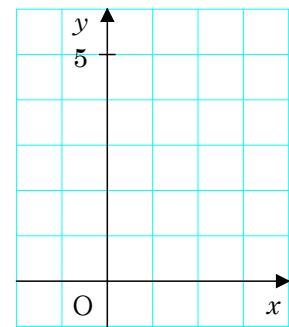
問題② 2次関数 $y = x^2 + 4x + 3$ ($-1 \leq x \leq 3$)の最大値と最小値を求めよ.



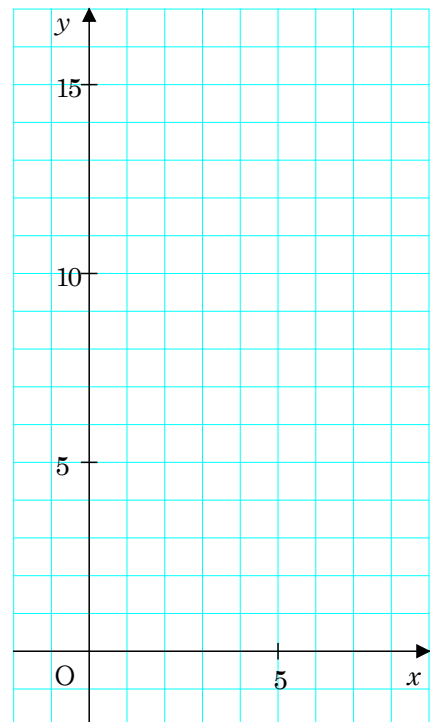
参考 定義域を表す不等式の両端の不等号が \leq , \geq のときは、必ず最大値、最小値が存在する.

3 定義域が限られていないときの最大・最小**例題**③ 2次関数 $y = -x^2 - 4x + 1$ の最大値または最小値を求めよ.**考え方** グラフをかく.**解****問題**③ 次の2次関数の最大値または最小値を求めよ.

(1) $y = 2x^2 - 4x + 3$



(2) $y = -x^2 + 8x$



一般に、2次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ は

(i) $a > 0$ のとき

最大値：

最小値： (のとき)

(ii) $a < 0$ のとき

最大値： (のとき)

最小値：

例題 4 2次関数 $y = 2x^2 + 4x + k$ は最小値 3 をもつ。このとき、定数 k の値を求めよ。

考え方 平方完成をして、最小値を k の式で表す。

解

問題 4 2次関数 $y = -2x^2 + 8x - 3k$ は最大値 5 をもつ。このとき、定数 k の値を求めよ。

問題⑤ 2次関数 $y = -x^2 + 2kx + 7$ は $x = 3$ のとき、最大になるとする。そのときの定数 k の値を求めよ。また、この関数の最大値を求めよ。