

1 東京から沖縄へ

東京から沖縄へ行くには、

飛行機で行く方法が4通り、船で行く方法が3通り
ある。では、「飛行機または船」で行く方法は何通りあるだろうか。

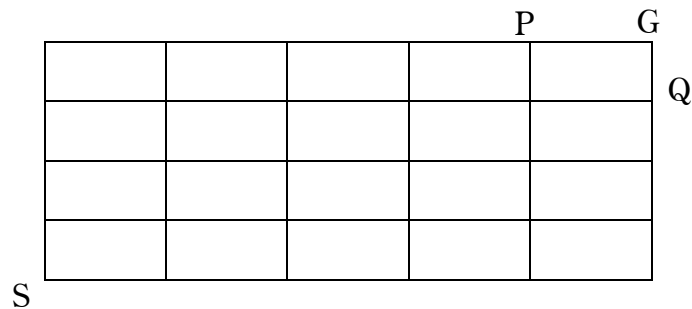
和の法則

2つの事柄 A , B があり、これらが同時に起こらないとする。このとき、
 A の起こる場合が m 通り、 B の起こる場合が n 通り
ならば、

A または B の起こる場合の数は 通り

である。

問題 S から G へ行くのに、P を通る方法が 70 通り、Q を通る方法が 56 通りある。S から G へ行くには何通りの方法があるか。



通り

年 組 番 氏名

2 登山の計画

A市からB市まで行く方法が4通り、B市からC山の頂上まで行く方法が2通りある。では、A市からB市を経由してC山の頂上まで行く方法は何通りあるだろうか。

積の法則

2つの事柄 A , B がある。いま、
 A の起こる場合が m 通りあり、
 そのおのおのに対して

B の起こる場合が n 通りあるならば、

A と B がともに起こる場合の数は 通り

である。

問題 A市からB市へ行く方法が3通り、B市からC市へ行く方法が2通り、C市からD市へ行く方法が4通りある。A市からB市、C市を通過してD市へ行くには何通りの方法があるか。

通り

年 組 番 氏名

③ 打順の決め方

球技大会で野球を行うことになった。選手になったのは、次の9人である。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
北岡	足立	角田	石井	石川	佐藤	伊藤	烏田	閨間

さて、打順の決め方は何通りあるだろうか。次のようにして考えてみよう。

① 打者が1人だったら _____ 通り

② 打者が2人だったら _____ 通り

③ 打者が3人だったら _____ 通り

④ 打者が4人だったら _____ 通り

⑤ 打者が5人だったら _____ 通り

⑥ 打者が6人だったら _____ 通り

⑦ 打者が7人だったら _____ 通り

⑧ 打者が8人だったら _____ 通り

⑨ 打者が9人だったら _____ 通り

年 組 番 氏名

4 驚いた！という記号

9人を1列に並べる方法は

$$\square \times \square \times \square \times \square \times \square \times \square \times \square \times \square \times \square$$

で計算される。これはとても大きな数なので、十進位取り記数法の他に

ア

という記号でも表し、イ という。

イ

n の階乗

問題① 次の階乗を計算せよ。

$1! =$

$2! =$

$3! =$

$4! =$

$5! =$

$6! =$

$7! =$

$8! =$

$9! =$

$10! =$

問題② 階乗の定義より、

$$n! = n \times (n-1)!$$

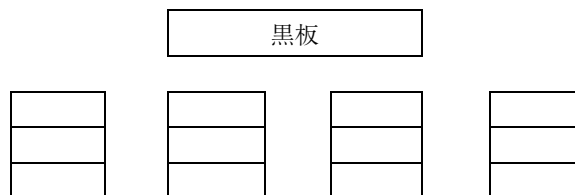
が成り立つ。

(1) 上の式の n に 1 を代入したらどのような式になるだろうか。

(2) (1)の結果から、 $0!$ をどのように定義したらよいか考えよ。

5 座席を決める方法

あるホームルームでは、生徒が 12 人在籍しており、机を次のように配置している。



座席の決め方は何通りあるだろうか。

問題 1 秒間に 1 回席替えをするとしよう。すべての座席の決め方を再現するには何年かかるか、考えてみよう。

注. 1 年間は、 $60 \times 60 \times 24 \times 365 \doteq 30000000$ 秒である

6 選んで並べる

12人の生徒の中からリレーの選手を4人選んで走る順序を決める. 何通りの決め方があるだろうか.

考え方① 12人の生徒の中から4人を選ぶ方法は 通りある. そのおのこのについて, 走る順序を決める方法は $4!$ 通りあるので, 決め方は $\times 4!$ 通りになるのだが ….

考え方② 12人の生徒の中から第1走者を選ぶ方法は 通りある. そのおのこのについて, 第2走者を選ぶ方法は 通りあり, そのおのこのについて, 第3走者を選ぶ方法は 通りあり, そのおのこのについて, 第4走者を選ぶ方法は 通りある.

つまり, \times \times \times 通りである.

順列の数

異なる n 個のものから r 個を取り出して1列に並べたものを

n 個から r 個取った

といい, その並べ方の総数を で表す.

問題 次の値を求めよ.

$${}_7P_3 =$$

$${}_5P_5 =$$

$${}_5P_2 =$$

$${}_7P_5 =$$

年 組 番 氏名

7 選手の選び方

12人の生徒の中からリレーの選手を4人選ぶ方法は何通りあるだろうか。

⇒注. 今回は, 走る順序を決める必要はない.

プリント「6 選んで並べる」で次のような考え方をした.

考え方① 12人の生徒の中から4人を選ぶ方法はア 通りある. そのおのこのについて, 走る順序を決める方法は4!通りあるので, 決め方は

$$\text{イ} \times 4! \text{通り}$$

になるのだが ….

この考え方の中のア に入る値が, 今回求めるものになる. プリント「6 選んで並べる」で得た結果から考えると

$$\begin{aligned} \text{ウ} \times 4! &= 12 \times 11 \times 10 \times 9 \\ \therefore \text{ウ} &= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4!} \end{aligned}$$

組合せの数

異なる n 個のものから r 個選んで組にしたものを

n 個から r 個取ったエ

といい, その選び方の総数をオ で表す.

問題 次の値を求めよ.

$7C_3 =$

$5C_5 =$

$5C_2 =$

$7C_5 =$

年 組 番 氏名

8 委員長の選び方などなど

順列のいろいろな問題を解いてみよう.

問題① 10人の委員からなる委員会で、委員長、副委員長、書記の3名を選ぶ方法は何通りあるか.

問題② 5個の数字0, 1, 2, 3, 4の中から異なる数字を用いてできる3桁の整数は何個あるか.

問題③ 2人の女子A, Bと3人の男子C, D, Eの5人を1列に並べるとき、3人の男子C, D, Eが隣り合う並べ方は何通りあるか.

9 部員の選び方などなど

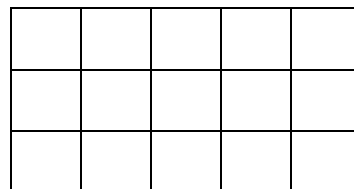
組合せのいろいろな問題を解いてみよう.

問題① 12人のバレーボール部員から6人の出場選手を選ぶとき、選び方の総数は何通りあるか.

問題② 正八角形の頂点を結んでできる三角形の個数を求めよ.

問題③ 男子7人と女子8人のグループから、男子2人と女子3人の代表を選ぶ方法は何通りあるか.

問題④ 右の図の中にある四角形の個数を求めよ.



11 修学旅行の計画

町田高等学校の2年生が修学旅行の計画を立てている。8クラスのうち、

4クラスが かりゆしビーチリゾート

3クラスが リザンシーパーク

1クラスが JAL プライベートリゾートオクマ

に分かれて宿泊することになった。何通りの分け方があるだろうか。

考え方 8クラスから『かりゆしビーチリゾート』の4クラスを選ぶ方法が

続いて、残りの4クラスから『リザンシーパーク』の3クラスを選ぶ方法が

残った1クラスは自動的に『JAL プライベートリゾートオクマ』になる。

よって、求める分け方は

⇒注. 上の **考え方** での計算は、次のようにすることもできる。

12 部屋の分かれ方

プリント「11 修学旅行の計画」の注で行った計算は、一般的に次のように述べることができる。

n 個のものを p 個, q 個, r 個, \dots に分ける方法の数

n 個のもののうち

p 個を A に, q 個を B に, r 個を C に, \dots

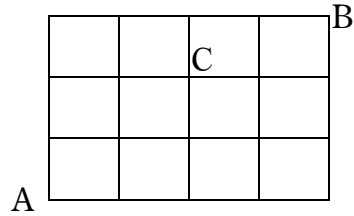
と分ける方法の数は

問題① 6人の生徒がいる. 3人ずつ2つの部屋A, Bに分ける方法は何通りあるか.

問題② 6人の生徒がいる. 3人ずつ2つのグループに分ける方法は何通りあるか.

13 道順の数は？

問題 下の図のような街路の町で、次のような道順は何通りあるか.



- (1) 地点 A から地点 B へ行く最短の道順

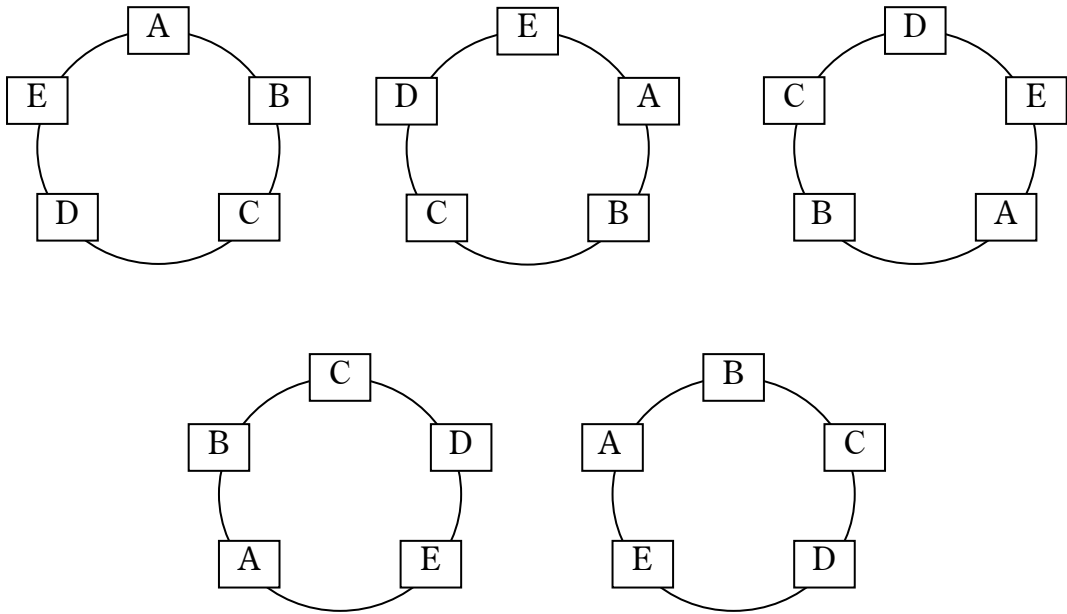
- (2) 地点 A から地点 C へ行く最短の道順

- (3) 地点 C から地点 B へ行く最短の道順

- (4) 地点 A から地点 C を経由して、地点 B へ行く最短の道順

14 トランプで遊ぼう！

5人でトランプを楽しむことにした。トランプのゲームは輪になって進めるので、次の座り方は、同じ座り方であると考えられる。



問題 異なる座り方は何通りあるだろうか？

注. このように円形に並べたものを円順列という.

年 組 番 氏名

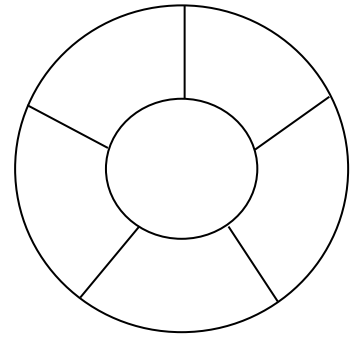
15 色の塗り分け方

プリント「14 トランプで遊ぼう！」で考えた輪になって座る方法の総数は、一般的に次のように述べることができる。

円順列の数

異なる n 個のものの円順列の総数は

問題 ある円板を、右の図のように中心が同じである円と5つの同じ図形に分ける。赤、青、黄、緑、白、黒の6色すべてを用いて、これら6つの部分を塗り分ける方法は何通りあるか。



16 部分集合の個数

用語解説

ある条件を満たすもの全体の集まりを A という。また、 A に属する個々のものを、 x という。

集合 B のすべての要素が、集合 A の要素になっているとき、集合のことを B を集合 A の U という。

例 集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$, 集合 $B = \{b, d, e\}$, 集合 $C = \{d\}$, 集合 $D = \{ \}$ とする。このとき、集合 B, C, D のいずれも集合 A の部分集合である。

問題 集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$ の部分集合は何個あるだろうか。

考え方① 集合 A の部分集合をすべて書き出してみよう。

すべての部分集合を書き出すのも1つの方法ではあるが、エレガントではない。そこ順列の考え方を利用して部分集合の個数を求めてみよう。

考え方② 集合 A のそれぞれの要素が部分集合に属するか、属さないかという視点で考えてみよう。

16 信号は何種類？

プリント「16 部分集合の個数」の「考え方②」で考えた方法を整理してみよう。

「考え方②」では、「○と×という2個の記号をくり返し使うことを許して5個並べている」とみることができる。これを一般的に述べてみよう。

重複順列の数

異なる n 個のものから、くり返し取ることを許して r 個を取り出して並べる順列を

n 個から r 個取ったア

といい、その並べ方の総数をイ で表す。

問題① 2種類の数字0か1を1列に8個並べて信号をつくる時、何種類の信号ができるか。

問題② a, b, c の3文字から、くり返し取ることを許して、5文字を取り出して1列に並べるとき、何通りの並べ方があるか。

19 $(a+b)^n$ の計算

数学 I のはじめに、次の公式を学んだ.

$$(a+b)^2 = \square a^2 + \square ab + \square b^2$$

$$(a+b)^3 = \square a^3 + \square a^2b + \square ab^2 + \square b^3$$

では、次の計算をしてみよう.

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= \\ &= \\ &= \\ &= \square a^4 + \square a^3b + \square a^2b^2 + \square ab^3 + \square b^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \square a^5 + \square a^4b + \square a^3b^2 + \square a^2b^3 + \square ab^4 + \square b^5 \end{aligned}$$

$(a+b)^0 = 1$, $(a+b)^1 = a+b$ の場合も含め、上で求めた展開式の係数だけを書き並べてみよう. 何かに似ていることに気がつかないだろうか.

$$(a+b)^0 \qquad \qquad \qquad 1$$

$$(a+b)^1 \qquad \qquad 1 \qquad \qquad \qquad 1$$

$$(a+b)^2$$

$$(a+b)^3$$

$$(a+b)^4$$

$$(a+b)^5$$

20 $(a+b)^n$ の展開

プリント「19 $(a+b)^n$ の計算」で展開式の係数だけを書き並べてみた結果、またしても Pascal の三角形が現れた。このことを考えると、 $(a+b)^n$ の展開式は次のようになる。

二項定理

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_{n-1} a b^{n-1} + {}_nC_n b^n$$

この式の右辺に現れる各項の係数

を $\boxed{\quad}$ という。

問題 二項定理を用いて、次の式を展開せよ。

(1) $(a+b)^7$

(2) $(a+b)^8$

(3) $(x+1)^9$

(4) $(2x+1)^5$

21 Pascal の三角形のヒ・ミ・ツ

プリント「19 $(a+b)^n$ の計算」で展開式の係数だけを書き並べてつくった Pascal の三角形をもう一度眺めてみよう.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (a+b)^0 & & & & & & 1 \\
 (a+b)^1 & & & & 1 & & 1 \\
 (a+b)^2 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 (a+b)^3 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 (a+b)^4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 (a+b)^5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

問題① Pascal の三角形に現れる数を横に足すと、どのような結果が得られるだろうか. その結果から、次の に入る式を予想せよ.

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_r + \cdots + {}^nC_{n-1} + {}^nC_n = \text{$$

問題② Pascal の三角形に現れる数を横に見たとき、各数の間に $-$ と $+$ を交互に入れて計算すると、どのような結果が得られるだろうか. その結果から、次の に入る式を予想せよ.

$$(n \text{ が奇数のとき}) \quad {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \cdots - {}^nC_n = \text{$$

$$(n \text{ が偶数のとき}) \quad {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \cdots + {}^nC_n = \text{$$

$(-1)^n = \begin{cases} -1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$ であるから、上の式は次のように書ける.

$$(n \text{ が正の整数のとき}) \quad {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \cdots + (-1)^n {}^nC_n = \text{$$

22 Pascal の三角形のヒ・ミ・ツをあばく

プリント「**22 Pascal の三角形のヒ・ミ・ツをあばく**」の **問題**① と **問題**②
で予想した結果が正しいことを

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_n b^n \quad (22.1)$$

を利用して示してみよう.

解答① 式 (22.1) において, $a=1$, $b=1$ とする.

解答② 式 (22.1) において, $a=1$, $b=-1$ とする.

問題 次の式の値を求めよ.

(1) ${}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_3 + \cdots + {}_{10}C_{10}$

(2) ${}_{10}C_0 - {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 - {}_{10}C_3 + \cdots + {}_{10}C_{10}$