2019 年度　平日講習

理系数学演習

— 難関大学編 —

東京都立青山高等学校

はじめに

問題演習を重ねて，習熟の度合いがかなり高まってきていることを実感していることだろう．これから，各自が志望する大学の過去問演習をすすめていくことと思う．その中で，様々な難易度の問題に出会うことだろう．確実に得点したい「標準」レベル，ある程度は得点したい「やや難」レベル，多くの受験生が得点の難しい「難」レベル，数学を得点源とするのでもない限り，「標準」，「やや難」のレベルの問題は演習をしておきたい．

この講習では難関大学の「標準」レベルの問題を中心に扱う．まずは，このレベルの問題を確実に得点できるようにしていこう．その際，解けるというだけでなく，解答を記述することにも気を配って欲しい．

講習では 25 分間で問題を解いてもらう．最初の 15 分間は各自で考え，残りの時間は周囲の人と一緒に考えてもらいたい．限られた時間の中で，しかも一緒に考えている時間で，他の人がどのような考え方をしたかを知ることで，自分の着想や思考の流れに幅を持たせることができる．

なお，25 分間という時間は難関大学の多くの問題から平均して設定したものである．各大学の問題セットによっては 25 分間という時間は変わってくることは，注意しておきたい．

問題を解いたあと，残りの 30 分で解説をする．なので，予習をする必要はない．その代わり，必ず復習をしてもらいたい．解説を聞いただけでは分かったつもりや理解が不十分なままで終わってしまう．さらに，時間をおいてかもう一度解くこともしよう．それにより，理解がより深まり，強固なものになっていく．

なお，「やや難」レベルの問題を扱う講座は，期末考査後の特別授業の中に設置する予定である．

【1】

$0<a<1$，$0<b<1$ のとき，x の 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解 α について，$|\alpha|<1$ を満たすものが存在することを示せ．

NOTE

【2】

a，b を異なる自然数とし，次の 2 次式で x，y を定める．

$$x = 3a^2 + ab$$

$$y = -2a^2 - 3ab + b^2$$

次の 2 つの条件を満たす a，b に対して，比 $\dfrac{b}{a}$ の値をすべて求めよ．

（ｉ）x は y で割り切れる

（ii）b は a で割り切れる

NOTE

【3】

k，l は正の整数とし，n は $k^2 \leqq n \leqq (k+l)^2$ を満たす整数とする．

(1) n が平方数でないとき，$\sqrt{n}$ が有理数でないことを示せ．また，$\sqrt{n}$ が有理数となる n は何個あるか．

(2) $[\sqrt{n}]$ で割り切れる n は何個あるか．ただし，実数 x に対して x を超えない最大の整数を $[\sqrt{n}]$ で表す．

NOTE

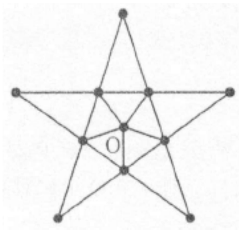
【4】

$\angle BAC = 90^\circ$ の直角三角形 ABC において辺 CA の中点を D とするとき，$\cos\angle CBD$ の最小値を求めよ．

NOTE

【5】

右の図のような星型の図形があり，点 P が図形上の各頂点を 1 秒ごとに線分で結ばれた隣接する頂点に移動する．各頂点においては線分で結ばれた隣接する頂点が 2 個または 5 個あり，これらの点へは等確率で移動するものとする．時刻 0 において点 P が点 O 上にあるとき，時刻 n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ において点 P が点 O 上にある確率を求めよ．



NOTE

【6】

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC の辺 OA，OB，OC 上にそれぞれ P，Q，R を

$$\mathrm{OP} = t,\ \mathrm{OQ} = 2t,\ \mathrm{OR} = 2t \quad \left(0 < t < \frac{1}{2}\right)$$

を満たすようにとる．△PQR の重心を G とし，3 点 P，Q，R から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点をそれぞれ P′，Q′，R′ とする．

(1) $\dfrac{\triangle \mathrm{P'Q'R'}}{\triangle \mathrm{ABC}}$ を t で表せ．

(2) 四面体 OABC，GP′Q′R′ の体積をそれぞれ V，V' とする．$\dfrac{V'}{V}$ を t で表し，その最大値を求めよ．

NOTE

【7】

座標空間内に 2 点 $\mathrm{A}\left(2\sqrt{2},\ 4,\ -1\right)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 2)$ がある．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 点 A を y 軸のまわりに適当な角度だけ回転したところ，xy 平面上の点 A' に一致したとする．このとき，点 A' の座標を求めよ．

(2) 点 P が y 軸上を動くとき，線分の長さの和 $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ．

NOTE

【8】

座標空間内に原点を通り，それぞれベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ に平行な直線 l_1，l_2，l_3，l_4 がある．l_1 上の点 P，l_2 上の点 Q，l_3 上の点 R，l_4 上の点 S について四角形 PQSR が平行四辺形であり，面積が $3\sqrt{2}$ である．
このとき，点 P の座標を求めよ．ただし，点 P の x 座標は正で，四角形 PQSR の頂点は，この順に並んでいるものとする．

NOTE

【9】

O を原点とする平面上の点列 P_1，P_2，$\ldots$ を次の条件を満たすように定める．

（i）$\mathrm{OP}_1 = r_1$，$\mathrm{OP}_2 = r_2$，$\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 = \theta$　$(r_1 > 0,\ r_2 > 0,\ 0 < \theta < \pi)$

（ii）線分 OP_n の中点を M_n とすると，

$$\triangle \mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{M}_n \backsim \triangle \mathrm{OP}_{n+2}\mathrm{M}_{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

ただし，ここでいう相似とは，左辺の三角形と右辺の三角形の頂点が，かかれた順に対応しているものとする．また，$\triangle \mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{M}_n$ と $\triangle \mathrm{OP}_{n+2}\mathrm{M}_{n+1}$ は OM_{n+1} 以外に共通部分をもたないものとする．

このとき，点 P_n $(n \geqq 2)$ が点 P_1 と一致するような n が存在するための必要十分条件を求めよ．

NOTE

【10】

次の各問いに答えよ.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ.

(2) 連続な関数 $f(x)$ が, ある定数 c に対して, $f(x)=-f(x+c)$ を満たすとき

$$\int_0^{2c} xf(x)\,dx = c\int_c^{2c} f(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ の値を求めよ.

NOTE

【11】

$a>0$，$b>0$ のとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は $x \geqq 0$ で単調増加な連続関数で $f(0)=0$，$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ とする．
不等式

$$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(x)\,dx \geqq ab$$

を示し，等号がどのような場合に成り立つかを調べよ．

(2) $p>1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ とする．不等式

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geqq ab$$

を示し，等号がどのような場合に成り立つかを調べよ．

NOTE

【12】

xyz 空間に次のような 2 つの立体 A, B がある.

$$A = \left\{(x,\ y,\ z) \mid z^2 \leqq x \leqq 2,\ -1 \leqq y \leqq 1\right\}$$

$$B = \left\{(x,\ y,\ z) \mid x^2 + y^2 \leqq 2x,\ -2 \leqq z \leqq 2\right\}$$

(1) 立体 A の体積を求めよ.

(2) 立体 $A \cap B$ の体積を求めよ.

NOTE

【答】

1. 略

2. 3，5

3. （1）証明は略，$l+1$（個）　（2）$3l+1$（個）

4. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

5. $p_0=1$，$p_n=\dfrac{1}{8}\left\{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$（$n=1$，2，…）

6. （1）$\dfrac{8}{3}t^2$　（2）$\dfrac{V'}{V}=\dfrac{8}{9}t^2(3-5t)$，最大値 $\dfrac{32}{225}$

7. （1）（0，4，±3）　（2）最小値 $\sqrt{41}$，$\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{8}{5},\ 0\right)$

8. （3，3，3）

9. $r_1=r_2$ かつ $\dfrac{\theta}{\pi}$ が有理数

10. （1）$\dfrac{\pi}{2}$　（2）略　（3）$-\dfrac{\pi^2}{2}$

11. （1）証明は略，等号が成り立つのは $b=f(a)$ のときに限られる
（2）証明は略，等号が成り立つのは $a^p=b^q$ のときに限られる

12. （1）$\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$　（2）$\dfrac{64\sqrt{2}}{15}$

NOTE

NOTE

$\Im\int\hbar\, i^2$

(L19−M0211)