2019 年度　特別授業

理系数学演習

— 続・難関大学編 —

東京都立青山高等学校

はじめに

いよいよ大学入試本番が迫ってきた．各自が志望する大学の過去問演習をすすめていることと思う．その中で入試問題には，確実に得点したい「標準」レベル，ある程度は得点したい「やや難」レベル，多くの受験生が得点の難しい「難」レベルという 3 段階の難易度があることを実感していることだろう．

通常授業で扱ってきた問題は，難関大学の入試問題を基準にすると「入試問題の基本」よりの「標準」レベルと純粋な「標準」レベルとなるものである．平日講習の『理系数学演習 ― 難関大学編 ―』では純粋な「標準」レベルから「やや難」よりの標準レベルの問題を中心に扱った．それに対し，特別授業では「やや難」よりの「標準」レベルから「やや難」レベルのものを中心に扱う．難関大学の志望者は完答までとはいかずとも，ある程度の部分点は確実に得点できるようにしておきたい．その際，解けるというだけでなく，解答を記述することにも気を配って欲しい．なお，ここで言う『難関大学』とは，旧 7 帝大，東工大，一橋大，神戸大の通称『難関 10 大学』と言われている大学を想定している．

問題としては，高等学校における数学の全範囲を対象として選んでいる．しかし，「やや難」レベルから「難」レベルの問題になると大学ごとの傾向が目立ってくる（各大学の作問を担当する教官の専門の色が滲む）ので，すべての単元を満遍なく扱うことはできていない．この点は注意しておきたい．

授業では 25〜30 分間で問題を解いてもらう．この時間で解ききれないものもあるだろう．しかし，本番の入試で 1 題に 35 分以上の時間を費やすのは厳しい．30 分程度を 1 つの解答時間の上限の目安にしておくことをすすめる．解答後，解説をするが，聞いただけでは分かったつもりや理解が不十分なままで終わってしまう．必ずその日のうちに，復習をするのを忘れないでもらいたい．さらに，時間をおいてからもう一度解くこともしよう．それにより，理解がより深まり，強固なものになっていく．また，問題を解いてくるという予習をする必要はないが，問題を読んでから授業に臨んだ方が，解答に取り組む時間を有益に使えるだろう．

なお，1 日で 2 題扱い，3 日間で 6 題扱う予定である．問題数としては決して多いものではない．各自の志望する大学の過去問を使って過去問研究と演習を積んでもらいたい．大学入試までの残りの時間を有効に使うためにも，この特別授業をに上手に活かして欲しい．

あと僅かの時間しか残されていないように感じるかもしれない．しかし，思い出して欲しい．外苑祭の本番まであと僅かだからと言ってあきらめることはしなかったはずだ．本番に近づくにつれ完成度が上がるという経験を青高生ならばしているはずである．この気の持ちようは些細なことに思えるかもしれないが，現役生は忘れてはいけないことだ．青高生であれば，大学入試の勉強だって同じである．粘って粘って，粘りつくそう！

【1】

サイコロを n 回振って出た目を順に a_1, a_2, $\ldots$, a_n とする．k 番目までの数 a_1, a_2, $\ldots$, a_k のうち最大値を A_k とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) サイコロを 2 回振り，$A_1 \neq 5$ かつ $A_2 \neq 5$ となるとき，サイコロの目の出方は何通りあるか.

(2) サイコロを 3 回振り，$A_1 \neq 5$ かつ $A_2 \neq 5$ かつ $A_3 \neq 5$ となるとき，サイコロの目の出方は何通りあるか.

(3) サイコロを n 回振り，$A_1 \neq 5$ かつ $A_2 \neq 5$ かつ $\cdots$ かつ $A_n \neq 5$ となるとき，サイコロの目の出方は何通りあるか.

NOTE

【2】

複素平面上で原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし，z_1 を $|z_1|>1$ である複素数とする．点 z_1 から C に引いた 2 本の接線の接点を通る直線を l とおく．

(1) 直線 l の方程式は $\overline{z_1}z+z_1\overline{z}=2$ であることを示せ．

(2) 点 z_1 を通り，C と 2 点で交わる直線 m を引く．m と l の交点を z_2，m と C の交点を z_3，z_4 とする．このとき，$\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=-1$ であることを示せ．

NOTE

【3】

O を原点とする座標平面の第 1 象限に点 A があり，点 A を通る傾きが負の直線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ P，Q とする．次の各問いに答えよ．

(1) A(8, 1) のとき線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

(2) A は曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ $(x > 0)$ 上の任意の動点とする．点 A に対して，線分 PQ の長さが最小になるように A を通る直線を引いたとき，$\angle$OPQ の大きさが最小となる A の座標を求めよ．

NOTE

【4】

次の各問いに答えよ.

(1) $0 < x \geqq 1$ のとき，次の不等式 $\log x \leqq x-1 \leqq \log \dfrac{x^2+1}{2}$ が成り立つことを証明せよ.

(2) 不等式 $0.2447 < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-t^2}\,dt < 0.2449$ を証明せよ.

NOTE

【5】

xyz 空間内に点 A(1, 0, 0), B(0, 0, 1), C(0, 1, 1), D(−1, 1, 0), E(0, 1, 0) がある．最初，点 P は点 A 上に，点 Q は点 C 上にあり，それぞれ △OAB，△CDE の周上を等しい速度で，A → B → O → A，および C → D → E → C の順で一回りするものとする．

(1) 線分 PQ と平面 $y = k$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ の交点を R とする．点 R の軌跡を求めよ．

(2) 線分 PQ が通過してできる曲面と △OAB，△CDE で囲まれる立体の体積を求めよ．

NOTE

【6】

$-1 \leqq x \leqq 1$ とする．正の整数 n に対して，x^n の係数が 1 である n 次関数 $f_n(x)$ を

$$f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^2-\frac{1}{2},\ f_{n+2}(x)=xf_{n+1}(x)-\frac{1}{4}f_n(x)\ (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

と定める．

(1) 任意の正の整数 n と実数 θ に対して，$f_n(\cos\theta)=\dfrac{1}{2^{n-1}}\cos n\theta$ が成り立つことを示せ．

(2) $n \geqq 3$ のとき，$f_n(x)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ の極値の絶対値はすべて等しいことを示し，その値を求めよ．

(3) $g(x)$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ で定義されており，最高次の係数が 1 の多項式で表された関数とする．$|g(x)|$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値を M とおく．

 (i) $M < f_n(1)$ のとき，方程式 $g(x)=f_n(x)$ は少なくとも n 個の異なる実数解をもつことを示せ．

 (ii) $g(x)$ を n 次関数とする．$f_n(x)$ は M を最小にする関数であることを示せ．

NOTE

【答】

1. (1) 26 通り　(2) 140 通り　(3) $2 \cdot 4^{n-1} + 3 \cdot 6^{n-1}$ (通り)

2. (1) 略　(2) 略

3. (1) $5\sqrt{5}$　(2) $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{8}\right)$

4. (1) 略　(2) 略

5. (1) 3 点 $(0,\ k,\ 0)$, $(1-k,\ k,\ k)$, $(-k,\ k,\ 1-k)$ を頂点とする三角形　(2) $\dfrac{1}{3}$

6. (1) 略　(2) 略, $\dfrac{1}{2^{n-1}}$　(3) (i) 略　(ii) 略

$\Im\int\hbar\, i^2$

(W19−M0312)