2020 年度

理系数学演習

第 2 版

東京都立青山高等学校

はじめに

数学の問題を解くときのことを考えてみよう．まず問題を読み，内容を理解したあと，試行錯誤しながら解法の糸口を見つけ出すというのが，一般的な流れだろう．この試行錯誤というところにポイントがある．行き当たりばったりでいろいろな方法を試す，というのでは効率が悪く，場合によっては迷宮の中に迷い込んでしまうこともあり得る．このような非効率な試行錯誤を避けるには，定理や公式などの数学的知識を蓄えているだけではなく，『数学的思考法』というものを意識して使ってみることが必要である．数学者も数学的思考法を使って，問題に取り組み，研究をしている．数学の問題を解決するのには欠かせない思考法である．

では，その思考法にはどのようなものがあるのか．数学教育学や認知心理学の研究成果から，高等学校の数学における問題解決では，次にあげる 16 項目に数学的思考法がまとめあげられている．

- 既知の問題に帰着する
- 定義・基本性質に帰る
- 逆向きに考える
- 次元を下げる（上げる）
- 見方を変える
- 「条件・求めるもの・目標・問題」を言いかえる
- 基準を定める
- 対応を考える
- 候補を絞り込む
- 「問題・図・式・場合」を分ける
- 具体化して考える
- 「図・表」で考える
- 1 つのもに着目する
- 「変数・文字」を減らす
- 段階的に考える
- 「未知・複雑」なものを文字でおく

数学的思考法を使えば，どのような問題も立ちどころに解けてしまう，という訳ではないが，問題の解決へ向けての試行を系統立てて行うことができる．意識してはいないだろうが，問題をスラスラと解いているときもこれらの思考法を使っている．問題の解決に行き詰まったときには，これらの数学的思考法を，ぜひ意識して欲しい．

【1】

$a>0$，$d>0$ とする．初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ について，次の各問いに答えよ．

（1）x の 2 次方程式

$$a_n x^2 - 2a_{n+1}x + a_{n+2} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

の 2 つの解を，α_n，β_n （$\alpha_n > \beta_n$）とし，$b_n = \dfrac{\alpha_n \beta_n}{\alpha_n - \beta_n}$ とする．このとき，数列 $\{b_n\}$ は等差数列であることを示せ．

（2）和 $b_1b_2 - b_2b_3 + b_3b_4 - b_4b_5 + \cdots b_{2n-1}b_{2n} - b_{2n}b_{2n+1}$ を求めよ．

NOTE

【2】

数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ が

$$a_1=2, \quad \frac{a_n-1}{a_{n+1}-1}=a_n \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

を満たすとき，次の各問いに答えよ．

（1）a_2，a_3 を求めよ．また，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

（2）$n \geqq 2$ において，不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k > \frac{n^3-1}{n^2}$ が成り立つことを示せ．

✎ NOTE

【3】

$p>0$ とする．初項が 1 の数列 a_n，b_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ は

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2pa_n + 2(p-1)b_n \\ b_{n+1} = (p-1)a_n + (p+1)b_n \end{cases} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

を満たす．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n + b_n\}$，$\{a_n - 2b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ を求めよ．

NOTE

【4】

平面上に，$OA = 1$，$OB = 2$，$AB = t$ $(1 < t < 3)$ の三角形 OAB がある．三角形 OAB の内心（内接円の中心）を I，重心を G とする．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OI}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) t が $1 < t < 3$ の範囲で変化するとき，直線 GI と辺 OA（端点を含まない）が交点をもつかどうか調べよ．

✎ NOTE

【5】

$AB = 4$，$BC = \sqrt{13}$，$CA = 3$ の三角形 ABC がある．AB の中点を M，AC の中点を N とし，三角形 ABC の外心を O とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AO}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\overrightarrow{AO}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(3) AO と BC の交点を D とするとき，三角形 ODC の面積を求めよ．

NOTE

【6】

xy 平面上の 3 点 O(0, 0)，A(1, 0)，B(−1, 0) に対し，条件

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0 \quad (k \text{ は実数の定数})$$

を満たす点 P の集合を C とする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，$\vec{x}\cdot\vec{y}$ は $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を表す．

(1) C が円を表すような k の値の範囲を求め，C の中心と半径を求めよ．

(2) (1) のとき，C 上に 3 点 X，Y，Z を $\angle\mathrm{XYZ}=90^\circ$ となるようにとる．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{QX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QY}}+\overrightarrow{\mathrm{QY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QZ}}=\overrightarrow{\mathrm{XY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{YZ}}$$

を満たす点 Q の集合は，X，Y，Z の位置にかかわらず，定点を通過する円になることを示し，定点の座標を求めよ．

NOTE

【7】

1 から 5 までの番号が 1 つずつ書かれた赤球と白球がそれぞれ 5 個ある．赤球と白球を 1 個ずつ，合計 2 個を 1 組とし，5 つの組をつくるとき，次の各問いに答えよ．

(1) 赤の 1 番と白の 1 番が 1 つの組になり，他の組のうちの 1 組だけが同じ番号となる確率を求めよ．

(2) 赤の 1 番と白の 1 番が 1 つの組になり，他の組はすべて番号が異なる確率を求めよ．

(3) 5 つの組のうち，1 組だけが同じ番号となる確率を求めよ．

NOTE

【8】

座標空間内の点 P は，さいころを振って出た目に応じて，次の規則にしたがって動く．

（規則）　1 または 2 の目が出たときは x 軸正方向に 1 だけ移動し，
3 または 4 の目が出たときは y 軸正方向に 1 だけ移動し，
5 または 6 の目が出たときは z 軸正方向に 1 だけ移動する．

最初に点 P は原点 O の位置にあるものとして，次の各問いに答えよ．

(1) さいころを 5 回振ったとき，点 P が平面 $z=2$ 上にある確率を求めよ．

(2) さいころを n 回 $(n \geqq 1)$ 振ったとき，点 P が平面 $z=k$ $(0 \leqq k \leqq n)$ 上にある確率を $p(k)$ とするとき，

(i) $\dfrac{p(k)}{p(k+1)}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ を n，k で表せ．

(ii) $p(k)$ が最大になるときの k を，n の値で場合を分けて求めよ．

NOTE

【9】

机の上に 4 枚のコインが置いてあり，この中から無作為に 2 枚のコインを選んで裏返すという試行を考える．表になっているコインが 2 枚，裏になっているコインが 2 枚の状態からこの試行を始め，n 回続けて行ったときに表裏の枚数が最初の状態に戻る確率を p_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ とおく．このとき，次の各問いに答えよ．

（1）p_1，p_2 の値を求めよ．

（2）p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

（3）p_n を n の式で表せ．

NOTE

【 10 】

3 つの自然数 a，b，c が

$$abc = 2a + 3b + 4c, \quad a \leqq b \leqq c$$

を満たすとき，次の各問いに答えよ.

（1） $a = 1$ のとき，b，c の組をすべて求めよ.

（2） $a \leqq 3$ を示せ.

（3） a，b，c の組をすべて求めよ.

NOTE

【11】

整数 n に対して，$P(n)=n^5-n$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

（1）$P(n)$ は 30 の倍数であることを示せ．

（2）$P(n)$ が 120 の倍数となるような n を求めよ．

NOTE

【 12 】

次の各問いに答えよ.

(1) 自然数 x, y が

$$xy - 3x - 2y + 12 = 0$$

を満たすとき, x, y の値の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

(2) 実数を係数とする関数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ がある. $f(1)$, $f(-1)$ がともに整数であるとき,

(i) $f(1) = p$, $f(-1) = q$ とおくとき, a, b を p, q で表せ.

(ii) 任意の整数 n に対して, $f(n)$ は整数となることを証明せよ.

NOTE

【13】

$0 < a < 3$ とする．xy 平面上に，原点 O を中心とし，半径 4 の円 C_1 と，点 A$(a,\ 0)$ を中心とし，半径 1 の円 C_2 がある．いま，円 C_1 の内部で，円 C_2 の外部にある点 P をとり，C_1，C_2 上の点と点 P との距離の最小値を，それぞれ，m_1，m_2 とする．$m_1 = m_2$ のとき，次の各問いに答えよ．

(1) OP + AP を求めよ．

(2) 点 P の軌跡を求めよ．

NOTE

【14】

楕円 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>b>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線と 2 直線 $x=a$ および $x=-a$ との交点をそれぞれ Q，R とする．このとき，線分 QR を直径とする円はつねに C の 2 つの焦点を通ることを示せ．ただし，$p \neq \pm a$ とする．

NOTE

【 15 】

原点 O を極，x 軸正方向を始線とする極座標について考えるとき，次の各問いに答えよ.

(1) 極座標が (1, 0) の点を中心とし半径 1 の円 C の極方程式を求めよ.

(2) (1) の円 C 上の点 P の極座標が $(r,\ \theta)$ であるとき，極座標が $(r^2,\ 2\theta)$ で表される点 Q をとる．点 P が C 上を動くとき，点 Q の軌跡の極方程式を求めよ.

(3) 極座標が (4, 0) の点 A と (2) の点 Q の距離 AQ の最大値を求めよ.

NOTE

【 16 】

複素平面上の原点以外の相異なる 2 点 P(α)，Q(β) を考える．P(α)，Q(β) を通る直線を l，原点から l に下ろした垂線の足を R(w) とする．ただし，複素数 γ が表す点 C を C(γ) とかく．このとき，

> $w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は P(α)，Q(β) が中心 A$\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあることである

を示せ．

✎ NOTE

【17】

複素数 z を $z=\cos\dfrac{2}{7}\pi+i\sin\dfrac{2}{7}\pi$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ の値を求めよ．

(2) 複素平面において，1，z，z^2，z^3，z^4，z^5，z^6 の表す点をそれぞれ P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，
P_6 とする．三角形 $P_1P_2P_4$ の重心を $Q(\alpha)$，三角形 $P_3P_5P_6$ の重心を $R(\beta)$ とおくとき，複素数 α と β を求めよ．

(3) 三角形 P_0QR の面積を求めよ．

NOTE

【18】

複素数 z の虚部を $\mathrm{Im}\,z$ で表す.

(1) 複素平面上の 3 点 O, z_1, z_2 を頂点にもつ三角形の符号つき面積は $\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\,(\overline{z_1}z_2)$ で与えられることを示せ. ただし, 符号つき面積とは, 三角形の頂点 O, z_1, z_2 が時計の針が回る向きと逆向きに並んでいるときは正, 同じときは負と定める.

(2) 複素平面上の 3 点 z_1, z_2, z_3 を頂点にもつ三角形の面積は $\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\,(\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1)$ の絶対値により与えられることを示せ.

(3) 複素平面上の 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 をこの順に結ぶと四角形が得られるとする. この四角形の面積を (2) にならって表せ.

NOTE

【 19 】

正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\,2,\,\ldots)$ に対し，初項から第 n 項までの和を S_n とする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，正の実数からなる無限級数は，収束または正の無限大への発散のいずれかになることは証明なしに用いてよい．

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \cdot S_{n+1}}$ は収束することを示せ．

(2) r を $r>0$ かつ $r \neq 1$ を満たす実数とする．このとき，無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n(r-1)^2}{(r^n-1)(r^{n+1}-1)}$$

の和を求めよ．

NOTE

【20】

角 O が直角で，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$ の直角二等辺三角形 OAB がある．いま，辺 AB を n 等分する点のうち，A に最も近いものを P とする．$\angle\mathrm{AOP}=\theta_n$ とおくとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\sin\theta_n$ を n の式で表せ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\theta_n$ を求めよ．

NOTE

【21】

a，b を実数の定数とする．$x>0$ の範囲で定義された関数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{n+1}+bx^2+1}{x^n+x^{n-1}+1}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) x の値で場合を分けて，$f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ が $x>0$ において連続であるとき，a，b の満たす関係式を求めよ．

(3) $f(x)$ が $x>0$ において微分可能であるとき，a，b の値を求めよ．

NOTE

【22】

a は $a > 0$ を満たす定数とする．xy 平面上の曲線 $C : y = e^{ax}$ に原点 O から接線 l を引き，その接点を P とする．C 上の点 P における法線と y 軸の交点を A とし，点 P から x 軸，y 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする．△OPQ，△PAR の面積をそれぞれ S_1，S_2 とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 点 P の座標を a を用いて表せ.

(2) a が $a > 0$ の範囲で変化するとき，$S_1 - S_2$ の最大値を求めよ.

NOTE

【23】

次の各問いに答えよ．ただし，対数は e を底とする自然対数である．

(1) 方程式 $\log x + x + 1 = 0$ は，$0 < x < \dfrac{1}{e}$ の範囲にただ 1 つの実数解をもつことを示せ．

(2) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^x$ $(0 < x < 1)$ は $0 < x < \dfrac{1}{e+1}$ の範囲に極小値をもつことを示せ．

NOTE

【24】

a，b を任意の正の実数とするとき，不等式

$$|(a+1)e^{-a}-(b+1)e^{-b}| \leqq \frac{1}{e}|a-b|$$

が成り立つことを示せ．ただし，必要であれば，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ は証明なしに用いてよい．

NOTE

【25】

xy 平面上に曲線 $C : y = \log x$ がある．C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)\ (t > 1)$ における接線を l とし，点Pを通り x 軸と垂直な直線を m とする．m，C および x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l，C および x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) S_1，S_2 を求めよ．

(2) t が $t > 1$ の範囲で変化するとき，$S_1 - S_2$ の最大値を求めよ．

NOTE

【26】

xy 平面上に曲線 $C : y = \sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ がある．x 軸上において，区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ を，n 等分する点の x 座標を原点 O に近い方から順に $a_0(= 0)$，a_1，a_2，…，$a_n(= \pi)$ とする．曲線 C と直線 $x = a_k$ の共有点を $\mathrm{A}_k\,(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ とし，直線 OA_k と C で囲まれる図形の面積を S_k とするとき，次の各問いに答えよ．

（1）S_k を求めよ．

（2）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{n}$ を求めよ．

NOTE

【27】

xyz 空間の平面 $z=0$ 上に曲線 $C: y=\sin x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ がある．平面 $z=0$ 上で，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t, 0)$ における C の法線と x 軸との交点を Q とし，P を通り平面 $z=0$ と垂直な直線上に点 P′ を，Q を通り平面 $z=0$ と垂直な直線上に点 Q′ を $\mathrm{PP'}=\mathrm{QQ'}=t$ となるようにとる．ただし，P′，Q′ の z 座標は $z>0$ とする．
t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，長方形 PQQ′P′ が通過してできる立体を V とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 点 Q の x 座標を $f(t)$ とするとき，$f(t)$ を求め，$f(t)$ が単調増加関数であることを示せ．

(2) V の平面 $z=k\left(0 \leqq k \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ における断面積を求めよ．

(3) V の体積を求めよ．

NOTE

【答】

1. (1) 略　(2) $-\dfrac{n\{a+(n+2)d\}}{2d}$

2. (1) $\dfrac{n+1}{n}$　(2) 略

3. (1) $a_n+b_n=2(3p-1)^{n-1}$, $a_n-2b_n=-2^{n-1}$
(2) $0<p<1$ のとき -1, $p=1$ のとき 1, $p>1$ のとき 2

4. (1) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{2}{3+t}\vec{a}+\dfrac{1}{3+t}\vec{b}$　(2) 交点をもつ

5. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=4$, $\overrightarrow{\mathrm{AN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{9}{4}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(3) $\dfrac{65\sqrt{3}}{92}$

6. (1) 中心：(0, 0), 半径：$\sqrt{k+1}$　(2) 略, 定点：(0, 0)

7. (1) $\dfrac{1}{15}$　(2) $\dfrac{3}{40}$　(3) $\dfrac{3}{8}$

8. (1) $\dfrac{80}{243}$
(2)　(i) $\dfrac{2(k+1)}{n-k}$
(ii) $\dfrac{k}{3}\,(n=3m)$, $\dfrac{n-2}{3}$, $\dfrac{n+1}{3}\,(n=3m-1)$, $\dfrac{n-1}{3}\,(n=3m-2)$

9. (1) $p_1=\dfrac{2}{3}$, $p_2=\dfrac{7}{9}$　(2) $p_{n+1}=1-\dfrac{1}{3}p_n$　(3) $p_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{12}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

10. (1) $(b, c)=(5, 17), (6, 10)$
(2) 略
(3) $(a, b, c)=(1, 5, 17), (1, 6, 10), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$

11. (1) 略　(2) 奇数または 8 の倍数

12. (1) $(x, y)=(1, 9), (5, 1), (8, 2)$
(2)　(i) $a=\dfrac{p+q-2}{2}$, $b=\dfrac{p-q}{2}$
(ii) 略

13. (1) 5　(2) 楕円 $\dfrac{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2}{\dfrac{25}{4}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{25}{4}-\dfrac{a^2}{4}}=1$

14. 略

15.（1）$r=2\cos\theta$　（2）$r=2\cos\theta+2$　（3）$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

16.　略

17.（1）-1　（2）$\alpha=-\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{7}}{6}i$，$\beta=-\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{7}}{6}i$　（3）$\dfrac{7\sqrt{7}}{36}$

18.（1）略　（2）略　（3）$\left|\dfrac{1}{2}(\bar{z}_1z_2+\bar{z}_2z_3+\bar{z}_3z_4+\bar{z}_4z_1)\right|$

19.（1）略　（2）$0<r<1$ のとき r，$r>1$ のとき 1

20.（1）$\dfrac{1}{\sqrt{n^2-2n+2}}$　（2）1

21.（1）$0<x<1$ のとき bx^2+1，$x=1$ のとき $\dfrac{a+b+1}{3}$，$x>1$ のとき $\dfrac{ax^2}{x+1}$
（2）$a=2b+2$
（3）$a=8$，$b=3$

22.（1）$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a},\ e\right)$　（2）$\dfrac{e^3}{3\sqrt{3}}$

23.（1）略　（2）略

24.　略

25.（1）$S_1=t\log t-t+1$，$S_2=\dfrac{1}{2}t(\log t)^2-t\log t+t-1$　（2）2

26.（1）$1-\cos\dfrac{k}{n}\pi-\dfrac{k}{2n}\pi\sin\dfrac{k}{n}\pi$　（2）$\dfrac{1}{2}$

27.（1）略　（2）$\cos k-\dfrac{1}{2}\sin^2 k\cos k$　（3）$\dfrac{5}{6}$

$\Im\int\hbar\, i^2$

(T20−M1231)