2019 年度　夏期講習

理系数学演習

東京都立青山高等学校

はじめに

数学の問題は，定理や公式を知っているだけで解けるものではない，ということは充分に経験していることと思う．数学の問題を解くには，定石といえるアプローチの仕方がある．ぜひ，次の内容を一読してから，問題の演習に入ってもらいたい．

数学的思考法

問題を読んで，内容を理解したあと，試行錯誤しながら解法の糸口を見つけ出すというのが，基本的な流れだろう．この試行錯誤というところにポイントがある．行き当たりばったりでいろいろな方法を試す，というのでは効率が悪く，場合によっては迷宮の中に迷い込んでしまうこともあり得る．このような非効率な試行錯誤を避けるには，数学的知識を蓄えているだけではなく，『数学的思考法』というものを意識して使ってみることが必要である．数学者も数学的思考法を使って，問題に取り組み，研究をしている．数学の問題を解決するのには欠かせない思考法である．

では，その思考法にはどのようなものがあるのか．数学教育学や認知心理学の研究成果から，高等学校の数学における問題解決では，次にあげる 16 項目に数学的思考法がまとめあげられている．

- 既知の問題に帰着する
- 定義・基本性質に帰る
- 逆向きに考える
- 次元を下げる（上げる）
- 見方を変える
- 「条件・求めるもの・目標・問題」を言いかえる
- 基準を定める
- 対応を考える
- 候補を絞り込む
- 「問題・図・式・場合」を分ける
- 具体化して考える
- 「図・表」で考える
- 1 つのもに着目する
- 「変数・文字」を減らす
- 段階的に考える
- 「未知・複雑」なものを文字でおく

数学的思考法を使えば，どのような問題も立ちどころに解けてしまう，という訳ではないが，問題の解決へ向けての試行を系統立てて行うことができる．意識してはいないだろうが，問題をスラスラと解いているときもこれらの思考法を使っている．問題の解決に行き詰まったときには，これらの数学的思考法を，ぜひ意識化して欲しい．

寺田の鉄則

上にあげた数学的思考法は，学習内容にかかわらない数学共通のものである．では，学習内容に則した数学的思考法のようなものはないのだろうか．『寺田の鉄則』と呼ばれるものが，それである．早稲田大学の教授であった故・寺田文行が高等学校の数学の参考書で示した．少し昔の学習指導要領の内容に則したものであるが，現在でも色褪せずに通用するものである．それらを以下にあげてみよう．

因数分解	(1) 1 文字中心に整理せよ — 次数に着目せよ (2) 共通因数に注意せよ (3) 式の特色に着目せよ (4) 因数定理を当てはめよ
無理数・複素数	(1) $a+b\sqrt{m}$，$a+bi$ の形に整理せよ (2) 共役数の活用もある (3) 代入では満たす式をつくれ
根号・絶対値記号の処理	(1) 平方を考えよ (2) 置き換えを考えよ (3) 絶対値の記号では範囲分けもある
必要・十分条件	(1) $A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow A$ に分けて書き出せ (2) 同値な言いかですすめよ (3) 集合の包含で考えよ
方程式の解の処理	(1) 因数分解・解の公式をあたれ (2) 解と係数・判別式でいけ (3) 解の定義 $f(\alpha)=0$ を用いよ (4) 適当な関数のグラフを活用せよ
等式・不等式による条件処理	(1) 式は 1 文字中心に整理せよ (2) 文字の消去と因数分解を試みよ (3) グラフ・領域で翻訳せよ (4) 式の特色に着目せよ
all と不等式	(1) 適当なグラフで翻訳せよ (2) 2 文字の不等式では領域で考えよ (3) 適当な値を当てはめよ
接線	(1) 重複解条件によれ (2) 接線の公式を取り上げよ (3) 円では中心と半径を活用せよ
最大・最小	(1) 適当な関数のグラフで考えよ — 変域に注意 (2) 与式 $\geqq$ 一定値，与式 $\leqq$ 一定値 に持ち込め (3) 2 変数では領域などの利用もある
三角比・三角関数	(1) 種類と角を統一せよ (2) 合成公式によりまとめよ (3) 和積公式により，積形へすすめ
図形の計量問題	(1) 直角に着目せよ — 三角比かピタゴラスか (2) 正弦定理・余弦定理を利用せよ (3) 面積を活用せよ (4) ベクトル・座標の利用をはかれ
内接円・外接円	(1) 内接円では接線長と半角を考えよ (2) 外接円では正弦定理を取り上げよ (3) 面積の利用も考えよ
円の問題	(1) 中心と半径を活用せよ (2) 方程式で処理せよ (3) $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を利用せよ
面積	(1) 公式を取り上げよ (2) 共有に着目せよ — 共有辺，共有角 (3) 対称性，隣接部分の活用はないか

平均と分散	(1) 表をつくれ (2) $p_1+p_2+p_3+\cdots=1$，$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$ の利用 (3) 二項分布のときは np，npq
個数の処理と確率	(1) サンプルを拾え (2) 場合に分けて流れ作業 (3) 余事象を利用せよ
整数の論証	(1) 約数，特に素因数に着目せよ (2) 余りに着目し，余りで分類せよ (3) つねに背理法を用意せよ
整数の決定問題	(1) 約数を拾いあげよ (2) 範囲を絞り，整数を拾い出せ (3) 具体化せよ
商と余り	(1) 割り算を実行せよ (2) 剰余定理を当てはめよ (3) 基本関係式 $A=B\cdot Q+R$ によれ (4) 導関数を利用せよ
恒等式（**all** と等式）	(1) 次数・係数を比較せよ (2) 適当な値を当てはめよ (3) 導関数を利用せよ
不等式の証明	(1) 差をとり，因数分解せよ (2) 差をとり，正値式の和形にせよ (3) 特殊不等式に当てはめよ (4) 適当な関数のグラフを利用せよ
軌跡・領域	(1) 動点 $(X,\ Y)$ — パラメータは消去せよ (2) 限界に注意せよ (3) ベクトルの利用をはかれ
指数の問題	(1) 累乗の積形は対数をとれ (2) 和差形は置き換えよ (3) グラフの特徴に着目せよ
対数の問題	(1) 対数の 1 次式はまとめよ (2) 非 1 次式では置き換えよ (3) グラフの特徴に着目せよ
ベクトル	(1) いくつかを基にして，他を線型表示せよ (2) 長さと角は，内積を利用せよ (3) 座標とベクトルでは，成分を取り上げよ
平面上の図形	(1) ユークリッドの方法で見よ (2) 図形の方程式を利用せよ (3) ベクトルの利用をはかれ
座標空間の図形	(1) 直線では，方向ベクトルと通過点に着目せよ (2) 平面では，法線ベクトルと通過点に着目せよ (3) 方程式を与えてスタートせよ
空間図形の計量	(1) 平面で切れ (2) 切り口は抜きがきせよ (3) ベクトルを活用せよ

数列の和	(1) 第 k 項の特色をみよ — 多項式型，指数型，分数型を見分けよ (2) 適当なグルーピングや補間を考える (3) 具体化して特色をつかめ
漸化式	(1) 3 基本形を連想せよ (2) 置き換えをはかれ (3) 具体化して推定せよ
一般数列の問題	(1) 具体化して特色をつかめ (2) 漸化式を誘導せよ (3) 論証では数学的帰納法を当てはめよ
2 次曲線	(1) 何を与えるか，どう与えるか (2) 2 次方程式の解の処理法にしたがえ — 特に，解と係数＋判別式 (3) 三角関数を活用せよ
数列の極限	(1) まず直接に，そして項の形を整えよ (2) はさみうちをはかれ (3) 関数の極限を利用せよ (4) $\lim\sum$ では $\int_0^1 f(x)\,dx$ を手本にせよ
無限級数	(1) 等比か否かをチェックせよ — 等比なら収束条件に着目せよ (2) 一般には部分和をつくれ
関数の極限	(1) まず直接に，そして形を整えよ (2) はさみうちをはかれ (3) 微分係数を利用せよ
グラフついての条件処理	(1) $f'(x)=0$ の解の条件処理に持ち込め — 増減，極値，端点値 (2) 多項式関数では恒等式処理も考えよ (3) $f(x)$ の利用も考えよ
関数と最大・最小	(1) $f(x)$ から増減表へすすめ — 変域に注意せよ (2) 変数を置き換えよ — 変域に注意せよ (3) 目標を取り換えよ
一般方程式・不等式	(1) 適当な関数のグラフを利用せよ (2) パラメータの分離をはかれ (3) 平均値の定理の利用も考えよ
時刻 t に対する変化率	(1) 直接表現 — 扱う量を t で表す (2) 間接表現 — 扱う量を他文字で表す (3) 微分方程式，積分方程式への誘導をはかれ
定積分の計算	(1) 積分区間内で被積分関数の形を整えよ (2) 置換積分・部分積分の活用をはかれ (3) 関数の特色を使え
定積分のもとでの関数決定	(1) 関数形を具体的に与えよ (2) 定数型では“$=a$”と置け (3) 微分型では導関数をとれ
定積分と不等式	(1) 定積分の計算の実行から不等式の処理へすすめ (2) 被積分関数の大小を考えよ — 特に極値と端点値 (3) 特殊不等式の活用をはかれ
曲線と面積	(1) 曲線の上下，端点，つなぎ目に着目せよ (2) 視点を変えよ — 隣接部に着目せよ，y 軸方向から見よ (3) 特色に着目せよ — 対称性，周期性の活用

体積	(1) 平面で切り，切り口を取り上げよ (2) 回転体では 3 注意 — 回転軸，π，面積との相違 (3) 特色を活用せよ — 対称性，周期性
微分方程式の解法	(1) 変数分離形かをみよ (2) 置き換えによる簡易化をはかれ (3) 積・商の導関数を連想せよ
曲線の決定問題	(1) 曲線上の動点を (X, Y) とせよ (2) 微分方程式を導け (3) 積分方程式を導け
関数等式	(1) 適当な値を当てはめよ (2) 1 文字の関数の等式とみて，導関数をつくれ

参考文献

[1] ニューアクション編集委員会 著，『NEW ACTION LEGEND 数学 I＋A』，東京書籍，2015 年.
[2] ニューアクション編集委員会 著，『NEW ACTION LEGEND 数学 II＋B』，東京書籍，2016 年.
[3] ニューアクション編集委員会 著，『NEW ACTION LEGEND 数学 III』，東京書籍，2018 年.
[4] 寺田文行 著，『鉄則　数学 I』，旺文社，1988 年.
[5] 寺田文行 著，『鉄則　代数・幾何』，旺文社，1988 年.
[6] 寺田文行 著，『鉄則　基礎解析』，旺文社，1988 年.
[7] 寺田文行 著，『鉄則　微分・積分』，旺文社，1988 年.
[8] 寺田文行 著，『鉄則　確率・統計』，旺文社，1988 年.
[9] 塚原茂夫 著，『新・高校数学による発見的問題解決法 — ストラテジー入門』，現代数学社，2004 年.
[10] G. Polya 著，柿内賢信 訳，『いかにして問題をとくか』，丸善，1975 年.

【 1 】

$a>0$，$d>0$ とする．初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ について，次の各問いに答えよ．

(1) x の 2 次方程式

$$a_nx^2-2a_{n+1}x+a_{n+2}=0 \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

の 2 つの解を，α_n，β_n $(\alpha_n>\beta_n)$ とし，$b_n=\dfrac{\alpha_n\beta_n}{\alpha_n-\beta_n}$ とする．このとき，数列 $\{b_n\}$ は等差数列であることを示せ．

(2) 和 $b_1b_2-b_2b_3+b_3b_4-b_4b_5+\cdots b_{2n-1}b_{2n}-b_{2n}b_{2n+1}$ を求めよ．

NOTE

【2】

数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ が

$$a_1=2, \quad \frac{a_n-1}{a_{n+1}-1}=a_n \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

を満たすとき，次の各問いに答えよ．

（1）a_2，a_3 を求めよ．また，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

（2）$n \geqq 2$ において，不等式 $\sum_{k=1}^{n-1} a_k > \frac{n^3-1}{n^2}$ が成り立つことを示せ．

NOTE

【3】

$p > 0$ とする．初項が 1 の数列 a_n，b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ は

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2pa_n + 2(p-1)b_n \\ b_{n+1} = (p-1)a_n + (p+1)b_n \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

を満たす．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n + b_n\}$，$\{a_n - 2b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ を求めよ．

NOTE

【4】

平面上に，$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{AB}=t$ （$1<t<3$）の三角形 OAB がある．三角形 OAB の内心（内接円の中心）を I，重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) t が $1<t<3$ の範囲で変化するとき，直線 GI と辺 OA（端点を含まない）が交点をもつかどうか調べよ．

NOTE

【5】

AB $=4$, BC $=\sqrt{13}$, CA $=3$ の三角形 ABC がある．AB の中点を M，AC の中点を N とし，三角形 ABC の外心を O とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(3) AO と BC の交点を D とするとき，三角形 ODC の面積を求めよ．

NOTE

【6】

xy 平面上の 3 点 O(0, 0)，A(1, 0)，B(−1, 0) に対し，条件

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$ （k は実数の定数）

を満たす点 P の集合を C とする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，$\vec{x}\cdot\vec{y}$ は $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を表す．

(1) C が円を表すような k の値の範囲を求め，C の中心と半径を求めよ．

(2) (1) のとき，C 上に 3 点 X，Y，Z を $\angle\mathrm{XYZ}=90^\circ$ となるようにとる．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{QX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QY}}+\overrightarrow{\mathrm{QY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QZ}}=\overrightarrow{\mathrm{XY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{YZ}}$$

を満たす点 Q の集合は，X，Y，Z の位置にかかわらず，定点を通過する円になることを示し，定点の座標を求めよ．

NOTE

【7】

1 から 5 までの番号が 1 つずつ書かれた赤球と白球がそれぞれ 5 個ある．赤球と白球を 1 個ずつ，合計 2 個を 1 組とし，5 つの組をつくるとき，次の各問いに答えよ．

(1) 赤の 1 番と白の 1 番が 1 つの組になり，他の組のうちの 1 組だけが同じ番号となる確率を求めよ．

(2) 赤の 1 番と白の 1 番が 1 つの組になり，他の組はすべて番号が異なる確率を求めよ．

(3) 5 つの組のうち，1 組だけが同じ番号となる確率を求めよ．

NOTE

【8】

座標空間内の点Pは，さいころを振って出た目に応じて，次の規則にしたがって動く．

（規則）　1または2の目が出たときは x 軸正方向に1だけ移動し，
3または4の目が出たときは y 軸正方向に1だけ移動し，
5または6の目が出たときは z 軸正方向に1だけ移動する．

最初に点Pは原点Oの位置にあるものとして，次の各問いに答えよ．

(1) さいころを5回振ったとき，点Pが平面 $z=2$ 上にある確率を求めよ．

(2) さいころを n 回 $(n \geqq 1)$ 振ったとき，点Pが平面 $z=k$ $(0 \leqq k \leqq n)$ 上にある確率を $p(k)$ とするとき，

(i) $\dfrac{p(k)}{p(k+1)}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ を n，k で表せ．

(ii) $p(k)$ が最大になるときの k を，n の値で場合を分けて求めよ．

NOTE

【9】

机の上に 4 枚のコインが置いてあり，この中から無作為に 2 枚のコインを選んで裏返すという試行を考える．表になっているコインが 2 枚，裏になっているコインが 2 枚の状態からこの試行を始め，n 回続けて行ったときに表裏の枚数が最初の状態に戻る確率を p_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ とおく．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) p_1，p_2 の値を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(3) p_n を n の式で表せ．

NOTE

【10】

3 つの自然数 a, b, c が

$$abc = 2a + 3b + 4c, \quad a \leqq b \leqq c$$

を満たすとき，次の各問いに答えよ．

(1) $a = 1$，b，c の組をすべて求めよ．

(2) $a \leqq 3$ を示せ．

(3) a，b，c の組をすべて求めよ．

NOTE

【 11 】

整数 n に対して，$P(n)=n^5-n$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $P(n)$ は 30 の倍数であることを示せ.

(2) $P(n)$ が 120 の倍数となるような n を求めよ.

NOTE

【 12 】

次の各問いに答えよ．

(1) 自然数 x，y が

$$xy - 3x - 2y + 12 = 0$$

を満たすとき，x，y の値の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(2) 実数を係数とする関数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ がある．$f(1)$，$f(-1)$ がともに整数であるとき，

(i) $f(1) = p$，$f(-1) = q$ とおくとき，a，b を p，q で表せ．

(ii) 任意の整数 n こ対して，$f(n)$ は整数となることを証明せよ．

NOTE

【13】

$O < a < 3$ とする．xy 平面上に，原点 O を中心とし，半径 4 の円 C_1 と，点 A$(a,\ 0)$ を中心とし，半径 1 の円 C_2 がある．いま，円 C_1 の内部で，円 C_2 の外部にある点 P をとり，C_1，C_2 上の点と点 P との距離の最小値を，それぞれ，m_1，m_2 とする．$m_1 = m_2$ のとき，次の各問いに答えよ．

(1) OP + AP を求めよ．

(2) 点 P の軌跡を求めよ．

NOTE

【 14 】

楕円 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上の点 P$(p,\ q)$ における接線と 2 直線 $x=a$ および $x=-a$ との交点をそれぞれ Q，R とする．このとき，線分 QR を直径とする円はつねに C の 2 つの焦点を通ることを示せ．ただし，$p \neq \pm a$ とする．

NOTE

【 15 】

原点 O を極，x 軸正方向を始線とする極座標について考えるとき，次の各問いに答えよ．

(1) 極座標が (1, 0) の点を中心とし半径 1 の円 C の極方程式を求めよ．

(2) (1) の円 C 上の点 P の極座標が $(r,\ \theta)$ であるとき，極座標が $(r^2,\ 2\theta)$ で表される点 Q をとる．点 P が C 上を動くとき，点 Q の軌跡の極方程式を求めよ．

(3) 極座標が (4, 0) の点 A と (2) の点 Q の距離 AQ の最大値を求めよ．

NOTE

【 16 】

複素平面上の原点以外の相異なる 2 点 P(α)，Q(β) を考える．P(α)，Q(β) を通る直線を l，原点から l に下ろした垂線の足を R(w) とする．ただし，複素数 γ が表す点 C を C(γ) とかく．このとき，

> $w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は P(α)，Q(β) が中心 A$\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあることである

を示せ．

NOTE

【17】

複素数 z を $z=\cos\dfrac{2}{7}\pi+i\sin\dfrac{2}{7}\pi$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ の値を求めよ．

(2) 複素平面において，1，z，z^2，z^3，z^4，z^5，z^6 の表す点をそれぞれ P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 とする．三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4$ の重心を $\mathrm{Q}(\alpha)$，三角形 $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6$ の重心を $\mathrm{R}(\beta)$ とおくとき，複素数 α と β を求めよ．

(3) 三角形 $\mathrm{P}_0\mathrm{QR}$ の面積を求めよ．

NOTE

【 18 】

複素数 z の虚部を $\mathrm{Im}\,z$ で表す.

(1) 複素平面上の 3 点 O, z_1, z_2 を頂点にもつ三角形の符号つき面積は $\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\,(\overline{z_1}z_2)$ で与えられることを示せ. ただし, 符号つき面積とは, 三角形の頂点 O, z_1, z_2 が時計の針が回る向きと逆向きに並んでいるときは正, 同じときは負と定める.

(2) 複素平面上の 3 点 z_1, z_2, z_3 を頂点にもつ三角形の面積は $\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\,(\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1)$ の絶対値により与えられることを示せ.

(3) 複素平面上の 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 をこの順に結ぶと四角形が得られるとする. この四角形の面積を (2) にならって表せ.

NOTE

【 19 】

正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ に対し，初項から第 n 項までの和を S_n とする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，正の実数からなる無限級数は，収束または正の無限大への発散のいずれかになることは証明なしに用いてよい．

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \cdot S_{n+1}}$ は収束することを示せ．

(2) r を $r>0$ かつ $r \neq 1$ を満たす実数とする．このとき，無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n(r-1)^2}{(r^n-1)(r^{n+1}-1)}$$

の和を求めよ．

NOTE

【20】

角 O が直角で，OA ＝ OB ＝ 1 の直角二等辺三角形 OAB がある．いま，辺 AB を n 等分する点のうち，A に最も近いものを P とする．$\angle\mathrm{AOP} = \theta_n$ とおくとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\sin\theta_n$ を n の式で表せ．

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty} n\theta_n$ を求めよ．

NOTE

【21】

a, b を実数の定数とする．$x > 0$ の範囲で定義された関数

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{ax^{n+1} + bx^2 + 1}{x^n + x^{n-1} + 1}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) x の値で場合を分けて，$f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ が $x > 0$ において連続であるとき，a, b の満たす関係式を求めよ．

(3) $f(x)$ が $x > 0$ において微分可能であるとき，a, b の値を求めよ．

NOTE

【22】

a は $a>0$ を満たす定数とする．xy 平面上の曲線 $C:y=e^{ax}$ に原点 O から接線 l を引き，その接点を P とする．C 上の点 P における法線と y 軸の交点を A とし，点 P から x 軸，y 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする．△OPQ，△PAR の面積をそれぞれ S_1，S_2 とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 点 P の座標を a を用いて表せ．

(2) a が $a>0$ の範囲で変化するとき，S_1-S_2 の最大値を求めよ．

NOTE

【23】

次の各問いに答えよ．ただし，対数は e を底とする自然対数である．

(1) 方程式 $\log x + x + 1 = 0$ は，$0 < x < \dfrac{1}{e}$ の範囲にただ1つの実数解をもつことを示せ．

(2) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^x$ $(0 < x < 1)$ は $0 < x < \dfrac{1}{e+1}$ の範囲に極小値をもつことを示せ．

NOTE

【24】

a，b を任意の正の実数とするとき，不等式

$$|(a+1)e^{-a}-(b+1)e^{-b}| \leqq \frac{1}{e}|a-b|$$

が成り立つことを示せ．ただし，必要であれば，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ は証明なしに用いてよい．

NOTE

【25】

xy 平面上に曲線 $C : y = \log x$ がある．C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ $(t > 1)$ における接線を t とし，点P を通り x 軸と垂直な直線を m とする．m，C および x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l，C および x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) S_1，S_2 を求めよ．

(2) t が $t > 1$ の範囲で変化するとき，$S_1 - S_2$ の最大値を求めよ．

NOTE

【26】

xy 平面上に曲線 $C : y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ がある．x 軸上において，区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ を，n 等分する点の x 座標を原点 O に近い方から順に $a_0(=0)$，a_1，a_2，…，$a_n(=\pi)$ とする．曲線 C と直線 $x = a_k$ の共有点を A_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ とし，直線 OA_k と C で囲まれる図形の面積を S_k とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) S_k を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{n}$ を求めよ．

NOTE

【27】

xyz 空間の平面 $z=0$ 上に曲線 $C : y=\sin x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ がある．平面 $z=0$ 上で，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ sint, 0)$ における C の法線と x 軸との交点を Q とし，P を通り平面 $z=0$ と垂直な直線上に点 P$'$ を，Q を通り平面 $z=0$ と垂直な直線上に点 Q$'$ を $\mathrm{PP'}=\mathrm{QQ'}=t$ となるようにとる．ただし，P$'$，Q$'$ の x 座標は $z>0$ とする．
t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，長方形 PQQ$'$P$'$ が通過してできる立体を V とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 点 Q の x 座標を $f(t)$ とするとき，$f(t)$ を求め，$f(t)$ が単調増加関数であることを示せ．

(2) V の平面 $z=k \left(0 \leqq k \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ における断面積を求めよ．

(3) V の体積を求めよ．

NOTE

$\Im\int\hbar\, i^2$

(S19−M2223)