2020年度

文系数学演習

東京都立青山高等学校

はじめに

数学の問題を解くときのことを考えてみよう．まず問題を読み，内容を理解したあと，試行錯誤しながら解法の糸口を見つけ出すというのが，一般的な流れだろう．この試行錯誤というところにポイントがある．行き当たりばったりでいろいろな方法を試す，というのでは効率が悪く，場合によっては迷宮の中に迷い込んでしまうこともあり得る．このような非効率な試行錯誤を避けるには，定理や公式などの数学的知識を蓄えているだけではなく，『数学的思考法』というものを意識して使ってみることが必要である．数学者も数学的思考法を使って，問題に取り組み，研究をしている．数学の問題を解決するのには欠かせない思考法である．

では，その思考法にはどのようなものがあるのか．数学教育学や認知心理学の研究成果から，高等学校の数学における問題解決では，次にあげる 16 項目に数学的思考法がまとめあげられている．

- 既知の問題に帰着する
- 定義・基本性質に帰る
- 逆向きに考える
- 次元を下げる（上げる）
- 見方を変える
- 「条件・求めるもの・目標・問題」を言いかえる
- 基準を定める
- 対応を考える
- 候補を絞り込む
- 「問題・図・式・場合」を分ける
- 具体化して考える
- 「図・表」で考える
- 1 つのもに着目する
- 「変数・文字」を減らす
- 段階的に考える
- 「未知・複雑」なものを文字でおく

数学的思考法を使えば，どのような問題も立ちどころに解けてしまう，という訳ではないが，問題の解決へ向けての試行を系統立てて行うことができる．意識してはいないだろうが，問題をスラスラと解いているときもこれらの思考法を使っている．問題の解決に行き詰まったときには，これらの数学的思考法を，ぜひ意識して欲しい．

【1】

数列

$$\frac{2}{1\cdot2},\ \frac{3}{1\cdot2},\ \frac{3}{2\cdot3},\ \frac{4}{1\cdot2},\ \frac{4}{2\cdot3},\ \frac{4}{3\cdot4},\ \frac{5}{1\cdot2},\ \frac{5}{2\cdot3},\ \frac{5}{3\cdot4},\ \frac{5}{4\cdot5},\ \frac{6}{1\cdot2},\ \cdots$$

について，次の各問いに答えよ.

(1) 第 1000 項を求めよ.

(2) 初項から第 1000 項までの和を求めよ.

(3) 初項から第 1000 項までに，1 より大きい項はいくつあるか.

NOTE

【2】

3種類の文字 A, B, C をくり返し用いて，同じ文字が隣り合わないように左から横一列に n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ 個並べて文字列をつくり，これを M_n とおく．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 文字列 M_n は何個つくれるか．

(2) 文字列 M_n のうち，右端の文字が A であるものの個数を a_n とおく．このとき，a_n を n で表せ．

NOTE

【3】

$\angle A = 90^\circ$，$BC = 3$ である直角二等辺三角形 ABC があり，辺 BC を $1:2$ に内分する点を P_1 とおく．P_1 から AB に垂線を下ろして AB との交点を Q_1 とし，Q_1 から BC に平行な直線を引いて AC との交点を R_1 とし，さらに R_1 から BC に垂線を下ろして BC との交点を P_2 とする．以下同様に，Q_2，R_2，P_3，Q_3，R_3，P_4，$\ldots$ を定めていく．$BP_n = x_n$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) x_{n+1} を x_n を用いて表せ.

(2) x_n を求めよ.

(3) $CP_n < \dfrac{999}{1000}$ を満たす自然数 n はいくつあるか.

NOTE

【4】

xy 平面上の 3 点 O(0, 0)，A(1, 0)，B(−1, 0) に対し，条件

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0 \quad (k \text{ は実数の定数})$$

を満たす点 P の集合を C とする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，$\vec{x}\cdot\vec{y}$ は $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を表す．

(1) C が円を表すような k の値の範囲を求め，C の中心と半径を求めよ．

(2) (1) のとき，C 上に 3 点 X，Y，Z を $\angle\mathrm{XYZ}=90^\circ$ となるようにとる．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{QX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QY}}+\overrightarrow{\mathrm{QY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QZ}}=\overrightarrow{\mathrm{XY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{YZ}}$$

を満たす点 Q の集合は，X，Y，Z の位置にかかわらず，定点を通過する円になることを示し，定点の座標を求めよ．

NOTE

【5】

OA $=$ BC $= a$，OB $=$ CA $= b$，OC $=$ AB $= c$ である四面体 OABC がある．
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ をそれぞれ a，b，c で表せ．

(2) 線分 OA の中点を M，線分 BC の中点を N とするとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right|$ を a，b，c で表せ．

(3) $a = 2$，$b = 1$ のとき，$\sqrt{3} < c < \sqrt{5}$ が成り立つことを示せ．

NOTE

【6】

正四面体 OABC において，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を D，辺 OC の中点を E，辺 BC を 3 : 1 に内分する点を F とし，辺 AB 上に点 G をとると，線分 DF，EG は点 H で交わる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) AG : GB を求めよ．

(3) 直線 OH と平面 ABC の交点を I とし，四面体 OIAB，OIBC，OICA の体積をそれぞれ V_1，V_2，V_3 とおくとき，$V_1 : V_2 : V_3$ を求めよ．

NOTE

【7】

1 から 5 までの番号が 1 つずつ書かれた赤玉と白玉がそれぞれ 5 個ある．赤玉と白玉を 1 個ずつ，合計 2 個を 1 組とし，5 つの組をつくるとき，次の各問いに答えよ．

(1) 赤の 1 番と白の 1 番が 1 つの組になり，他の組のうちの 1 組だけが同じ番号となる確率を求めよ．

(2) 赤の 1 番と白の 1 番が 1 つの組になり，他の組はすべて番号が異なる確率を求めよ．

(3) 5 つの組のうち，1 組だけが同じ番号となる確率を求めよ．

NOTE

【8】

一方の面が白，もう一方の面が黒のカードが 5 枚あり，5 枚すべて白の面を上にして横一列に並べた状態から次の操作を行う．

> サイコロを振り，n ($n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$) の目が出たときは，左から n 番目のカードを裏返し，6 の目が出たときは，すべてのカードを裏返す

この操作を 3 回行ったあと，黒の面が上になっているカードの枚数が k である確率を P_k とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) k のとり得る値を求めよ．

(2) P_3，P_5 をそれぞれ求めよ．

(3) 黒の面が上になっているカードの枚数の期待値を求めよ．

NOTE

【9】

座標空間内の点 P は，さいころを振って出た目に応じて，次の規則にしたがって動く．

（規則）　1 または 2 の目が出たときは x 軸正方向に 1 だけ移動し，
3 または 4 の目が出たときは y 軸正方向に 1 だけ移動し，
5 または 6 の目が出たときは z 軸正方向に 1 だけ移動する．

最初に点 P は原点 O の位置にあるものとして，次の各問いに答えよ．

(1) さいころを 5 回振ったとき，点 P が平面 $z=2$ 上にある確率を求めよ．

(2) さいころを n 回 $(n \geqq 1)$ 振ったとき，点 P が平面 $z=k$ $(0 \leqq k \leqq n)$ 上にある確率を $p(k)$ とするとき，

(i) $\dfrac{p(k)}{p(k+1)}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ を n，k で表せ．

(ii) $p(k)$ が最大になるときの k を，n の値で場合を分けて求めよ．

NOTE

【 10 】

整数 n に対して，$P(n) = n^5 - n$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $P(n)$ は 30 の倍数であることを示せ．

(2) $P(n)$ が 120 の倍数となるような n を求めよ．

NOTE

【 11 】

次の各問いに答えよ．

(1) 自然数 x，y が $xy-3x-2y+12=0$ を満たすとき，x，y の値の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(2) 実数を係数とする関数 $f(x)=ax^2+bx+1$ がある．$f(1)$，$f(-1)$ がともに整数であるとき，

(i) $f(1)=p$，$f(-1)=q$ とおくとき，a，b を p，q で表せ．

(ii) 任意の整数 n に対して，$f(n)$ は整数となることを証明せよ．

NOTE

【12】

3 つの自然数 a，b，c が

$$abc = 2a + 3b + 4c, \quad a \leqq b \leqq c$$

を満たすとき，次の各問いに答えよ．

（1）$a = 1$ のとき，b，c の組をすべて求めよ．

（2）$a \leqq 3$ を示せ．

（3）a，b，c の組をすべて求めよ．

NOTE

【 13 】

xy 平面上の曲線 $C : y = x^3 + ax^2 + x - 4$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 曲線 C と放物線 $C' : y = x^2 + 6x - 7$ が点 P を共有し，P における接線が一致するとき，a の値を求めよ．

(2) 点 A$(1,\ -7)$ から曲線 C にちょうど 2 本の接線が引けるとき，a の値を求めよ．

NOTE

【14】

次の各問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ が

$$f(x)+3g(x)=-x^2, \quad f'(x)+g'(x)=2x^2-4, \quad g(0)=1$$

を満たすとき, $f(x)$, $g(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $h(\theta)=\displaystyle\int_0^1 x|x-\sin\theta|\,dx$ の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ における最大値, 最小値を求めよ.

NOTE

【 15 】

xy 平面上に，2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = -x^2 + 2x + 4$ がある．C_1，C_2 で囲まれる領域を D とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) D の面積を求めよ．

(2) C_1 を y 軸正方向に p だけ平行移動した曲線 C_3 が，D の面積を二等分するとき，p の値を求めよ．

NOTE

【答】

1. (1) $\dfrac{46}{10 \cdot 11}$　(2) $\dfrac{11350}{11}$　(3) 164 個

2. (1) $3 \cdot 2^{n-1}$（個）　(2) $a_n = 2^{n-1}$

3. (1) $x_{n+1} = 3 - \dfrac{x_n}{2}$　(2) $2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　(3) 5 個

4. (1) $k > -1$，中心 $(0,\ 0)$，半径 $\sqrt{k+1}$　(2) 略，定点 $(0,\ 0)$

5. (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$，$\vec{b} \cdot \vec{c} = \dfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$，$\vec{c} \cdot \vec{a} = \dfrac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2)$
   (2) $\sqrt{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$
   (3) 略

6. (1) $\overrightarrow{\mathrm{ED}} = \dfrac{1}{3}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{4}\vec{c}$　(2) $2 : 3$　(3) $6 : 3 : 2$

7. (1) $\dfrac{1}{15}$　(2) $\dfrac{3}{40}$　(3) $\dfrac{3}{8}$

8. (1) 1，3，5　(2) $P_3 = \dfrac{5}{9}$，$P_5 = \dfrac{2}{27}$　(3) $\dfrac{65}{27}$

9. (1) $\dfrac{80}{243}$
   (2)　(i) $\dfrac{2(k+1)}{n-k}$
   (ii) $\dfrac{k}{3}$ $(n = 3m)$，$\dfrac{n-2}{3}$，$\dfrac{n+1}{3}$ $(n = 3m-1)$，$\dfrac{n-1}{3}$ $(n = 3m-2)$

10. (1) 略　(2) 奇数または 8 の倍数

11. (1) $(x,\ y) = (1,\ 9),\ (5,\ 1),\ (8,\ 2)$
   (2)　(i) $a = \dfrac{p+q-2}{2}$，$b = \dfrac{p-q}{2}$
   (ii) 略

12. (1) $(b,\ c) = (5,\ 17),\ (6,\ 10)$
   (2) 略
   (3) $(a,\ b,\ c) = (1,\ 5,\ 17),\ (1,\ 6,\ 10),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

13. (1) 2　(2) -6，-5，3

14. (1) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x - 3$，$g(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

18

（2）最大値 $\dfrac{5}{6}$，最小値 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

15.（1）9　（2）$\dfrac{9}{2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$

$\Im\int\hbar\, i^2$

(T20−M0121)