2019 年度　特別授業

数学スタンダード演習

東京都立青山高等学校

はじめに

大学入試センター試験が始まり，いよいよ大学入試本番の時期になった．過去問などにも取り組んでいることと思う．その中で入試問題には，確実に得点したい「標準」レベル，ある程度は得点したい「やや難」レベル，多くの受験生が得点の難しい「難」レベルという 3 段階の難易度があることを実感していることだろう．ただ，大学によってこの難易度にも幅ができる．例えば，Euler 大学では「標準」レベルと判断される問題が，Riemann 大学では「やや難」レベルと判断される問題になるという具合いにである．さらに「標準」レベルという同一のレベルでも，「やや難」よりのものから「入試問題の基本」よりのものまでの幅をもっている．通常授業では「標準」レベルの問題を扱ってきた．この「標準」レベルは，純粋に「標準」のものから「やや難」よりのものである．そのため，大学によっては「やや難」レベルの問題と判断されるものも含まれていた．それに対し，特別授業では純粋に「標準」のものから「入試問題の基本」よりのものを中心に扱う．入試で出題された場合には必ず得点をできるようにしておきたい．

問題としては，数学 I・II・III・A・B の全範囲から選んでいる．しかし，すべての単元を満遍なく扱うことはできていない．この点は注意しておきたい．

授業では 10〜15 分間で問題を解いてもらう．10〜15 分という時間が妥当な問題ばかりではないので，解ききれないものもあるだろう．そのため，解答後の解説を聞いただけでは，分かったつもりや理解が不十分なままで終わってしまう．必ずその日のうちに，復習をするのを忘れないでもらいたい．さらに，時間をおいてからもう一度解くこともしよう．それにより，理解がより深まり，強固なものになっていく．

また，問題を解いてくるという予習をする必要はないが，問題を読んでから授業に臨んだ方が，解答に取り組む時間を有益に使えるだろう．さらに，少しでも多くの内容を扱いたいので，通常の授業のときよりも解説は速くなる．しっかりと解説を聞くことについていくためにも，定義，定理などの基礎事項は押さえておく必要がある．

なお，1 日で 3〜4 問扱う予定である．大学入試までの残りの時間を有効に使うためにも，この特別授業をに上手に活かしてもらいたい．

あと僅かの時間しか残されていないように感じるかもしれない．しかし，思い出して欲しい．外苑祭の本番まであと僅かだからと言ってあきらめることはしなかったはずだ．本番に近づくにつれ完成度が上がるという経験を青高生ならばしているはずである．この気の持ちようは些細なことに思えるかもしれないが，現役生は忘れてはいけないことだ．青高生であれば，大学入試の勉強だって同じである．粘って粘って，粘りつくそう！

【1】

次の各問いに答えよ.

(1) 1, 2, 3 の 3 種類の数字を 5 個並べて 5 桁の整数をつくるとき, 3 種類すべての数字が少なくとも 1 つ含まれるような整数は何個できるか. ただし, 同じ数字を何回用いてもよい.

(2) 赤球が 12 個, 白球が 3 個の合計 15 個の球がある. どの白球も互いに隣り合わないように横一列に並べる並べ方は何通りあるか.

(3) x, y, z, w は $x+y+z+w=12$ を満たす整数とする. このとき, $x \geqq 1$, $y \geqq 1$, $z \geqq 1$, $w \geqq 1$ を満たすような組 (x, y, z, w) は何通りあるか.

✎ NOTE

【2】

袋の中に，赤球 4 個，青球 2 個，白球 3 個の合計 9 個の球が入っており，この中から同時に 3 個の球を取り出す．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 3 個の球の色がちょうど 2 種類である確率を求めよ．

(2) 赤球 1 個につき -1 点，青球 1 個につき 2 点，白球 1 個につき 0 点であるゲームを行う．このとき，得点の合計 X が $X < 0$ となる確率を求めよ．

NOTE

【3】

座標平面上をサイコロの目に応して，次のように動く点 P がある.

（ア）奇数の目が出たら x 軸正方向に 1，偶数の目が出たら y 軸正方向に 1 移動する

（イ）点 P が直線 $y=4$ 上に移動したら，そこで移動を終了する

点 P ははじめ原点 O にあり，サイコロをちょうど n 回振って移動が終了する確率を $p_n\ (n \geqq 4)$ とするとき，次の各問いに答えよ.

(1) p_n を n を用いて表せ.

(2) p_n を最大にする n の値を求めよ.

NOTE

【4】

自然数 m に対して，その正の約数の総和が $2m$ となるとき，m を完全数という．例えば，6 の正の約数は 1，2，3，6 であり，$1+2+3+6=12=2\times 6$ となることから，6 は完全数である．次の各問いに答えよ．

（1）p^n（p は素数，n は自然数）という形の完全数は存在しないことを証明せよ．

（2）pq（p，q は異なる素数）という形の完全数を求めよ．

NOTE

【5】

3 進法で表された自然数 X_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ を次の 2 つの規則により定める．

（ｉ）$X_1=10_{(3)}$

（ii）X_n の各位の数字に

0 ならば「01」，1 ならば「20」，2 ならば「10」に置き換える

という操作を行ってできる自然数を X_{n+1} とする．

例えば，$X_1=10_{(3)}$，$X_2=2001_{(3)}$，$X_3=10010120_{(3)}$ である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 3 進法で表された数を 2 で割ったときの余りは，各位の数の和を 2 で割ったときの余りと一致することを示せ．

(2) X_n の各位の数字の中の 1 の個数を l_n とするとき，l_{n+1} を l_n を用いて表せ．

(3) すべての自然数 n に対して，X_n は奇数であることを示せ．

NOTE

【6】

次の各問いに答えよ．

(1) 自然数 x，y が $xy-3x-2y+12=0$ を満たすとき，x，y の値の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(2) 実数を係数とする関数 $f(x)=ax^2+bx+1$ がある．$f(1)$，$f(-1)$ がともに整数であるとき，

(ｉ) $f(1)=p$，$f(-1)=q$ とおくとき，a，b を p，q で表せ．

(ii) 任意の整数 n に対して，$f(n)$ は整数となることを証明せよ．

NOTE

【7】

a, b を実数とし，$f(x)=x^3+(a-3)x^2+bx-3a^2+9a+27$ とおく．3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもち，そのうちの 1 つが $x=3$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1) a のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) 3 次方程式 $f(x)=0$ の異なる 3 つの実数解を α, β, γ とするとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ の最大値を求めよ．

NOTE

【8】

xy 平面において，連立不等式

$$\begin{cases} x+y-4 \geqq 0 \\ x-3y+8 \geqq 0 \\ 5x-3y-20 \leqq 0 \end{cases}$$

が表す領域を D とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) x^2+y^2 の最大値，最小値および，そのときの x，y の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\dfrac{y+1}{x}$ の最大値，最小値，および，そのときの x，y の値をそれぞれ求めよ．

NOTE

【9】

a を実数とし，2 点 A$(1,\ a^2+a)$，B$(-1,\ a^2-a)$ を通る直線を l_a とおく．a を実数全体で変化させるとき，直線 l_a の通過する領域を図示せよ．

NOTE

【10】

O を原点とする xy 平面において，曲線 $C : y = x(2 - x)$ 上の $1 < x < 2$ を満たす部分に点 P があり，点 P における曲線 C の接線と x 軸，y 軸の交点をそれぞれ Q，R とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 点 P の x 座標を $t\ (1 < t < 2)$ とするとき，点 P における曲線 C の接線の方程式を t を用いて表せ．

(2) 直線 OP が三角形 OQR の面積を二等分するとき，点 P の座標を求めよ．

(3) (2) において，曲線 C と x 軸とで囲まれる図形のうち，直線 OP の上方の部分を S_1，直線 OP の下方の部分を S_2 とするとき，$S_1 : S_2$ を求めよ．

NOTE

【11】

平面上に三角形OAB があり，OA $= 4$，OB $= 3$，AB $= \sqrt{15}$ である．点O から直線 AB に下ろした垂線の足を H，三角形 OAB の重心を G，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ の大きさを求めよ．

NOTE

【12】

四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 OC を 1：2 に内分する点を E とし，三角形 ABE の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，次の各問いに答えよ．

(1) 直線 DG と平面 ABC の交点を F とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を P，辺 OC を 2：1 に内分する点を Q とし，さらに線分 DG を 3：1 に内分する点を R とする．直線 PQ と直線 DG の交点を R とするとき，実数 t の値を求めよ．

NOTE

【13】

座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, a, 3)，B(a, 3, 1)，C(3, 1, a) について，次の各問いに答えよ．ただし，a は正の実数とする．

(1) 三角形 ABC の重心を G とすると，OG $\perp$ AG，OG $\perp$ BG が成り立つことを示せ．

(2) 四面体 OABC の体積が 3 となるとき，a の値を求めよ．

NOTE

【14】

2 つの数字 0 と 1 を重複を許して，左から順に n 個並べる．ただし，0 の右隣には 1 しか並べられず，1 の右隣には 0 も 1 も並べてよいものとし，このような規則を満たす列の個数を x_n とおく．例えば，$x_1 = 2$，$x_2 = 3$ である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) x_{n+2} を x_n と x_{n+1} を用いて表せ．

(2) x_{10} を求めよ．

NOTE

【 15 】

複素平面上の曲線 $C : z\overline{z} + iz - i\overline{z} - 3 = 0$ について，次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とし，$\overline{z}$ は z の共役な複素数を表す．

(1) 曲線 C はどのような図形か答えよ．

(2) 点 z が曲線 C 上を動くとき，$w = 2z + 3 + 2i$ によって定められる点 w の図形はどのような図形か答えよ．

(3) (2) の w に対して，$|w|$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

NOTE

【 16 】

次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $w = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ とするとき，w^{99} の値を求めよ．

(2) 方程式 $z^5 = -2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}i$ の解を極形式で表せ．

NOTE

【17】

a を実数の定数とする．O を原点とする座標平面上に，曲線 $C : y = \log x + a + 1$ があり，C 上の点 P における接線 l が O を通るとき，次の各問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．

(1) 点 P の座標，および，接線 l の方程式を a を用いて表せ．

(2) 点 P における C の法線を m とし，m と x 軸との交点を Q とする．このとき，点 Q の座標を a を用いて表せ．

(3) (2) の点 Q に対して，三角形 OPQ の面積が $\dfrac{5}{3}$ となるとき，a の値を求めよ．

NOTE

【18】

Oを原点とする座標平面上に，点 A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ および，点 P$(0,\ t)$ $(0 < t < 1)$ がある．いま，線分 AP の垂直二等分線を l とし，l と線分 OA，AB の交点をそれぞれ Q，R とする．三角形 AQR の面積を $S(t)$ とおくとき，次の各問いに答えよ．

(1) 直線 l の方程式を t を用いて表せ.

(2) $S(t)$ を求めよ.

(3) $S(t)$ を最小にする t の値を求めよ.

NOTE

【19】

関数 $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x-2}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ の $x\to\infty$ のときの漸近線を求めよ．

(2) $f(x)$ の増減，および，曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べて，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

NOTE

【20】

xy 平面上に，曲線 $C : y = |2\sqrt{x} - 1|$ があり，C 上の点 A$(0,\ 1)$ を通り，曲線 C と点 A 以外の点で接する直線を l とおく．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C と直線 l の囲む図形の面積 S を求めよ．

NOTE

【21】

xy 平面上に，2 曲線 $C_1 : y = ae^x + b$，$C_2 : y = \log x + 1$ があり，C_1，C_2 はともに点 A(1, 1) を通り，かつ A において共通の接線をもつものとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) 2 曲線 C_1，C_2 と x 軸，y 軸によって囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

NOTE

【22】

区分求積法を用いて，次の各問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)^2}{n^6}$ を求めよ．

(2) O を原点とする xy 平面上の曲線 $C：y=x^2$ がある．また，点 A(1, 0) に対して線分 OA を n 等分する点を O に近い方から順に A_1，A_2，…，A_n (＝A) とし，A_k ($k=1$, 2, …, n) を通り y 軸に平行な直線と C の交点を P_k とする．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\angle\mathrm{P}_k\mathrm{OA}_k$ を求めよ．

NOTE

【23】

$a_n = \int_1^e x(\log x)^n\, dx$（$n$ は自然数）とする．このとき，次の各問いに答えよ．

（1）a_{n+1} を a_n を用いて表せ.

（2）$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ.

NOTE

【 24 】

$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ において，$f(x)=\displaystyle\int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt$ とするとき，$f(x)$ の最大値を求めよ．

NOTE

【答】

1.（1）150 個　（2）286 通り　（3）165 通り

2.（1）$\dfrac{55}{84}$　（2）$\dfrac{17}{42}$

3.（1）$\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2^{n+1}}$　（2）$n=6,\ 7$

4.（1）略　（2）6

5.（1）略　（2）$l_{n+1}=2^2-l_n$　（3）略

6. （1）$(x,\ y)=(1,\ 9),\ (5,\ 1),\ (8,\ 2)$
（2）(i) $a=\dfrac{p+q-2}{2}$，$b=\dfrac{p-q}{2}$　(ii) 略

7.（1）$-2<a<0$，$0<a<6$　（2）36

8. （1）$x=7$，$y=5$ のとき，最大値 74，$x=2$，$y=2$ のとき，最小値 8
（2）$x=1$，$y=3$ のとき，最大値 4，$x=4$，$y=0$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{4}$

9. 略

10.（1）$y=-2(t-1)x+t^2$　（2）$\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{8}{9}\right)$　（3）8 : 19

11. $\dfrac{2\sqrt{70}}{15}$

12.（1）$\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}$　（2）$\dfrac{2}{3}$

13.（1）略　（2）2，$-1+\sqrt{6}$

14.（1）$x_{n+2}=x_n+x_{n+1}$　（2）144 個

15.（1）中心 i，半径 2 の円　（2）中心 $3+4i$，半径 4 の円　（3）最大値 9，最小値 1

16. （1）$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$
（2）$z_n=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2n\pi}{5}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2n\pi}{5}\right)\right\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

17.（1）$\mathrm{P}(e^{-a},\ 1)$，$l : y=e^a x$　（2）$(e^a+e^{-a},\ 0)$　（3）$\pm\log 3$

18.（1）$y=\frac{1}{t}x+\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$　（2）$\frac{(1+t^2)^2}{8(1+t)}$　（3）$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$

19.（1）$y=x+2$　（2）略

20.（1）$y=\frac{1}{2}x+1$　（2）$\frac{7}{6}$

21.（1）$a=\frac{1}{e}$，$b=0$　（2）$\frac{\pi(-e^2+4e-1)}{2e^2}$

22.（1）$\frac{1}{9}$　（2）$\sqrt{2}-1$

23.（1）略　（2）略

24. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

NOTE

$\Im\int\hbar\, i^2$

(W19−M0311)