2020 年度

数学 I・II・A・B 演習

第 2 版

東京都立青山高等学校

はじめに

数学 I・II・A・B の問題演習は，1 学期から各自ですすめてきていることだろう．2 学期以降は，より実践的な問題演習を行っていく必要がある．入試問題には，確実に得点したい「標準」レベル，ある程度は得点したい「やや難」レベル，多くの受験生が得点の難しい「難」レベルという 3 段階の難易度があることは知っていると思う．ただ，大学によってこの難易度にも幅ができる．例えば，Euler 大学では「標準」レベルと判断される問題が，Riemann 大学では「やや難」レベルと判断される問題になるという具合いにである．さらに「標準」レベルという同一のレベルでも，「やや難」よりのものから「入試問題の基本」よりのものまでの幅をもっている．1 学期の授業では，純粋に「標準」レベルとなる問題を扱ってきた．本テキストも「標準」レベルとなる問題を扱っているが，多くの大学では「やや難」よりになる問題が多くなっている．そのため，大学によっては「やや難」レベルの問題と判断されるものもある．そのため，志望大学が固まってきている人の中には「やや難レベルは・・・」という人もいるかもしれない．だが，「やや難」レベルであったとしても，まったく手が出ないということはないはずだ．むしろ，部分点を稼げる問題にしておくべきである．演習をしておいて損になる問題は選んではいない．ぜひ，臆することなく，果敢に問題に臨んでもらいたい．

本テキストの問題の多くは，各単元にまたがったもので構成されている．本番の入試では，複数の単元にまたがり，主要なテーマとなる単元が表面に現れない問題も多くある．そのような問題であっても「標準 $\sim$ 標準 $+\alpha$」の難易度の問題であれば，得点をすることが欠かせない．ぜひ，入試本番でもそのような問題に取り組んでいけるようにしよう．

授業に臨む前には，必ず予習をしもらいたい．その際，1 問を解くのに，20 分という目標解答時間を設定してみよう．時間をかけて，問題を解き切るということは数学の学習にとっては欠かせないことだ．しかし，大学入試には制限時間がある．これからは，予習のときにも時間を意識して解くことをしてみよう．なお，20 分間というのは多くの大学入試問題の平均解答時間から設定したものであり，すべての問題が 20 分間で解けたり，20 分の時間がかかったりということを意味しない．中には，解答するのに 30 分間くらいかかったり，15 分間くらいで解けたりする問題もある．この点は注意しておきたい．また，必ずその日のうちに復習をしよう．さらに，時間をおいてからもう一度解くこともしてもらいたい．それにより，理解がより深まり，強固なものになっていく．

夏休みも終わり，大学入学共通テストまで，あと 3 ヶ月と少しとなった．僅かの時間しか残されていないように感じるかもしれない．しかし，思い出して欲しい．外苑祭の本番まであと僅かだからと言ってあきらめることはしなかったはずだ．本番に近づくにつれ完成度が上がるという経験を青高生ならばしているはずである．この気の持ちようは些細なことに思えるかもしれないが，現役生は忘れてはいけないことだ．青高生であれば，大学入試の勉強だって同じである．粘って粘って，粘りつくそう！

1. 4 次式 $f(x)$ を $x-1$，x^2+x+1 で割った余りがそれぞれ -9，$36x-51$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を x^3-1 で割った余りを求めよ．

(2) $f(x)$ が $(x-2)^2$ で割り切れるとき，$f(x)$ を求めよ．

(3) (2) のとき，$f(n)$ が素数となるような整数 n の値を求めよ．

2. a，b を実数とし，$f(x)=x^3+(a-3)x^2+bx-3a^2+9a+27$ とおく．3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもち，そのうちの 1 つが $x=3$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1) a のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) 3 次方程式 $f(x)=0$ の異なる 3 つの実数解を α，β，γ とするとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ の最大値を求めよ．

3. 実数を係数とする多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$（ただし，$a \fallingdotseq 0$）がある．方程式 $x^4=x$ のすべての解が方程式 $\{f(x)\}^2=f(x)$ を満たすとき，a，b，c の値の組をすべて求めよ．

4. 次の各問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) x の 2 次方程式 $x^2+ax+8=0$ が 2 より大きい異なる 2 つの実数解をもつとき，a のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) x の 4 次方程式 $(x^2+2x+3)^2+a(x^2+2x+3)+8=0$ の実数解の個数を調べよ．

5. a を整数の定数とする．3 次方程式 $9x^3-(3a+7)x-a-4=0$ が整数でない正の有理数の解をもつような a の値を求めよ．また，そのうち最大の a に対する 3 次方程式の解をすべて求めよ．

6. xy 平面において，連立不等式

$$\begin{cases} x+y-4 \geqq 0 \\ x-3y+8 \geqq 0 \\ 5x-3y-20 \leqq 0 \end{cases}$$

が表す領域を D とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) x^2+y^2 の最大値，最小値および，そのときの x，y の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\dfrac{y+1}{x}$ の最大値，最小値，および，そのときの x，y の値をそれぞれ求めよ．

7. a を実数とし，2 点 A$(1,\ a^2+a)$，B$(-1,\ a^2-a)$ を通る直線を l_a とおく．a を実数全体で変化させるとき，直線 l_a の通過する領域を図示せよ．

8. xy 平面上に，放物線 $C: y=x^2$，直線 $l: y=mx-m+2$ がある．C と l の交点を A，B，線分 AB の中点を M とし，A，B における C の接線の交点を N とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) N の座標を m を用いて表せ．

(2) $\triangle \mathrm{ABN} \leqq 4\sqrt{2}$ となるとき，点 M の軌跡を求めよ．

9. a を実数の定数とするとき，円 $C: x^2+y^2+(3a-2)x-(a+2)y-7a-3=0$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 円 C は実数 a の値にかかわらずつねに定点を通ることを示し，定点の座標を求めよ

(2) 円 C の中心を P とするとき，P の軌跡を求めよ．

(3) 円 C が円 $C': x^2+y^2+6y+1=0$ と接するとき，a の値を求めよ．

10. xy 平面において不等式 $x^2+y^2 \leqq a^2$ であらわされる領域を S とし，点 $(x,\ y)$ が S 全体をうごくとき，次の各問いに答えよ．ただし，a を正の定数とする．

(1) $X=x+y$，$Y=xy$ とするとき，点 $(X,\ Y)$ の存在する領域 T を XY 平面に図示せよ．

(2) $2(x+y)+xy$ の最大値と最小値を求めよ．

11. 座標平面上に，円 $C: x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$，直線 $l: y=-1$ および点 A$(1,\ 0)$ がある．A から出た光線は l 上の点 P$(\alpha,\ -1)$ で反射するものとし，光線は C を通過することができる．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) P で反射した光線が C の周または内部を通るような α の値の範囲を求めよ．

(2) P で反射した光線は，直線 $m: y=x+2$ 上の点 Q で反射するものとする．Q で反射した光線が C の周または内部を通るような α の値の範囲を求めよ．

12. xy 平面上に点 T$(0,\ t)$ を中心とする円 C_t がある．いま，点 A$(2,\ 0)$ を端点とし，C_t に接する 2 本の半直線があり，この 2 本の半直線のなす角が $60°$ であるとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) C_t の方程式を求めよ．

(2) t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，C_t の周が通過する領域を図示せよ．

13. 平面上に三角形 OAB があり，OA $=4$，OB $=3$，AB $=\sqrt{15}$ である．点 O から直線

AB に下ろした垂線の足を H，三角形 OAB の重心を G，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ の大きさを求めよ．

14. 四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 OC を 1：2 に内分する点を E とし，三角形 ABE の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，次の各問いに答えよ．

(1) 直線 DG と平面 ABC の交点を F とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を P，辺 OC を 2：1 に内分する点を Q とし，さらに線分 DG を 3：1 に外分する点を R とする．直線 PQ と直線 DG の交点が R となるとき，実数 t の値を求めよ．

15. 座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, a, 3)，B(a, 3, 1)，C(3, 1, a) について，次の各問いに答えよ．ただし，a は正の実数とする．

(1) 三角形 ABC の重心を G とすると，OG ⊥ AG，OG ⊥ BG が成り立つことを示せ．

(2) 四面体 OABC の体積が 3 となるとき，a の値を求めよ．

16. △OAB において，OA = 4，OB = 3，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{3}$ が成り立つ．辺 OA，OB 上にそれぞれ点 P，Q を，直線 PQ が △OAB の重心 G を通るようにとる．OP $=x$，OQ $=y$ とおくとき，次の各問いに答えよ．ただし，$x>0$，$y>0$ とする．

(1) x，y の満たす関係式を求めよ．

(2) △OPQ の面積の最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ．

17. xyz 空間内の 8 点

$$A_1(1,\ 1,\ 1),\quad A_2(-1,\ 1,\ 1),\quad A_3(-1,\ -1,\ 1),\quad A_4(1,\ -1,\ 1),$$
$$A_5(1,\ 1,\ -1),\quad A_6(-1,\ 1,\ -1),\quad A_7(-1,\ -1,\ -1),\quad A_8(1,\ -1,\ -1)$$

を頂点とする立方体がある．いま，この立方体を xy 平面上の直線 $y=-x$，$z=0$ を軸に回転させ，点 A_1 を z 軸上の正の部分に移動させる．点 A_i $(1\leqq i\leqq 8)$ が点 B_i に移るとするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 点 B_5 の座標を求めよ．

(2) 面 $B_5B_6B_7B_8$ において，z 成分が 0 以上である部分の面積を求めよ．

18. 四面体 OABC において OA = 2，OB = OC = 1，∠AOB = ∠ACB = 90° が成り立つ．いま，△ABC の重心を G とし，線分 OG を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を E，直線 CE と平面 OAB の交点を F とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, t を用いて表せ.

(2) 直線 CF が平面 OAB と垂直であるとき, t の値を求めよ. また, このとき, 四面体 EABC の体積を求めよ.

19. 空間内の定点 O から等距離にある 4 点 A, B, C, D について, 条件

$$\mathrm{AD}=\mathrm{BC},\ \mathrm{BD}=\mathrm{CA},\ \mathrm{CD}=\mathrm{AB}\ \cdots\ (*)$$

を考える. 点 X を

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

で定めるとき, 次の命題が成り立つことをそれぞれ示せ.

(1) 点 X が点 O に一致するならば, 4 点 A, B, C, D は $(*)$ を満たす.

(2) $(*)$ を満たす 4 点 A, B, C, D は点 X から等距離にある.

(3) 4 点 A, B, C, D が同一平面上になく, かつ $(*)$ を満たすならば, 点 X は点 O に一致する.

20. 座標空間に, 2 点 A$(2,\ 3,\ 3)$, B$(-2,\ -1,\ 1)$, および x 軸上に点 C, y 軸上に点 D があり, AC $=$ BC, AD $=$ BD を満たしている. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) C, D の座標を求めよ.

(2) 直線 AB 上の点 P に対して, $\mathrm{AB}\perp\mathrm{CP}$ となるとき, $\triangle$PCD の面積を求めよ.

(3) 点 C から平面 ABD に下した垂線の長さを求めよ.

21. 平面上に $\triangle$ABC がある. 実数 s, t に対し, 平面上の 2 点 P, Q は次の条件

$$(t+1)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(-t+1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}+(s+t-1)\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

$$(-s-t)\overrightarrow{\mathrm{QA}}+(2s+1)\overrightarrow{\mathrm{QB}}+2t\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$$

を満たし, $\mathrm{P}\neq\mathrm{Q}$ ならば, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 条件を満たす点 P, Q が存在するための s と t が満たす条件を求めよ.

(2) (1) の条件を満たして s, t が変化するとき, 線分 PQ の中点 M の存在範囲を図示せよ.

22. AB $=3$ である $\triangle$ABD の内心 I について $7\overrightarrow{\mathrm{IA}}+5\overrightarrow{\mathrm{IB}}+3\overrightarrow{\mathrm{IC}}=\vec{0}$ が成り立つとき, 次の各問いに答えよ.

(1) BC, CA の長さを求めよ.

(2) 点 P が $\triangle$ABC の内接円上を動くとき, $v_p=\left|3\overrightarrow{\mathrm{IP}}-\overrightarrow{\mathrm{IA}}-\overrightarrow{\mathrm{IB}}-\overrightarrow{\mathrm{IC}}\right|$ の最大値を求めよ.

23. 1 辺の長さが 1 の正三角形 OAB がある．いま，線分 AB を $s:(1-s)\left(\dfrac{1}{2}<s<1\right)$ に内分する点 P をとり，P を通り AB に垂直な直線と直線 OB の交点を Q とし，Q を通り OB に垂直な直線と直線 OA の交点を R とする．さらに，R を通り OA に垂直な直線と直線 PQ の交点を X とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 線分 OQ，OR の長さを求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(3) 点 X が三角形 OAB の内部（周上を含まない）にあるとき，s のとり得る値の範囲を求めよ．

24. 2 つの数字 0 と 1 を重複を許して，左から順に n 個並べる．ただし，0 の右隣には 1 しか並べられず，1 の右隣には 0 も 1 も並べてよいものとし，このような規則を満たす列の個数を x_n とおく．例えば，$x_1=2$，$x_2=3$ である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) x_{n+2} を x_n と x_{n+1} を用いて表せ．

(2) x_{10} を求めよ．

25. 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は

$$a_1=2,\ a_{n+1}-2a_n=2^n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$b_1=-\frac{1}{4},\ nb_{n+1}-(n+1)b_n=\frac{n-1}{n+2} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

を満たしている．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) a_n，b_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ を求めよ．

26. n を自然数とする．0，1，2 の 3 種類の数字を次の条件を満たすように左から順に n 個並べて数列をつくる．

（条件） 0 を連続して並べることはなく，2 の次に数字を並べるときは必ず 0 を並べる

このような数列のうち，左端が 0，1，2 であるものの個数をそれぞれ a_n，b_n，c_n とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n を用いて表せ．

(2) a_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ を求めよ．

27. a，b は 1 から 100 までの自然数とする．これを使ってできる 100^2 個の分数 $\dfrac{b}{a}$（分

数は約分しないものとする）を，以下の規則にしたがって左から順に並べて得られる数列を考える．ただし，$\max(a,\ b)$ は a，b のうち小さくない方を表すものとする．

（ｉ）$\max(a,\ b)$ の小さい分数ほど左側にある

（ii）$\max(a,\ b)$ が同じときは，値の小さい分数ほど左側にある

このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{11}{18}$ は左から何番目にあるか．

(2) 左から 1000 番目にある分数を求めよ．

(3) 左から 1000 番目までに 9 以上の分数は何個あるか．

28. n を 2 以上の整数とする．n 個の 0 でない実数 a_1，a_2，…，a_n が次の 2 つ条件

（ｉ）$a_{k+1} = \dfrac{a_1 + a_k}{1 - a_1 a_k}$ $(k = 1,\ 2,\ \dots,\ n-1)$

（ii）$a_1 + a_n = 0$

を満たすとき，次の各問いに答えよ．

(1) $a_2 + a_{n-1} = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) n は偶数であることを示せ．

29. 次の各問いに答えよ．

(1) 1，2，3 の 3 種類の数字を 5 個並べて 5 桁の整数をつくるとき，3 種類すべての数字が少なくとも 1 つ含まれるような整数は何個できるか．ただし，同じ数字を何回用いてもよい．

(2) 赤球が 12 個，白球が 3 個の合計 15 個の球がある．どの白球も互いに隣り合わないように横一列に並べる並べ方は何通りあるか．

(3) x，y，z，w は $x+y+z+w=12$ を満たす整数とする．このとき，$x \geqq 1$，$y \geqq 1$，$z \geqq 1$，$w \geqq 1$ を満たすような組 $(x,\ y,\ z,\ w)$ は何通りあるか．

30. 6 個の数字 0，1，2，3，4，5 を用いて 4 桁の自然数をつくるとき，次の各問いに答えよ．ただし，1 つの数字は 1 回しか使わないものとする．

(1)（ｉ）3 の倍数となるものは何個あるか．

（ii）3 の倍数または 5 の倍数となるものは何個あるか．

(2) 得られる自然数の総和を求めよ．

31. 袋の中に，赤球 4 個，青球 2 個，白球 3 個の合計 9 個の球が入っており，この中から同時に 3 個の球を取り出す．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 3 個の球の色がちょうど 2 種類である確率を求めよ．

(2) 赤球 1 個につき -1 点，青球 1 個につき 2 点，白球 1 個につき 0 点であるゲームを行う．このとき，得点の合計 X が $X < 0$ となる確率を求めよ．

32. 座標平面上をサイコロの目に応して，次のように動く点Pがある．

（ア）奇数の目が出たら x 軸正方向に1，偶数の目が出たら y 軸正方向に1移動する

（イ）点Pが直線 $y=4$ 上に移動したら，そこで移動を終了する

点Pははじめ原点Oにあり，サイコロをちょうど n 回振って移動が終了する確率を p_n $(n \geqq 4)$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) p_n を n を用いて表せ．

(2) p_n を最大にする n の値を求めよ．

33. 1個のサイコロを n 回続けて振り，出た目の数を順に a_1，a_2，…，a_n とする．このとき，次の確率を求めよ．ただし，$n \geqq 3$ とする．

(1) a_1，a_2，…，a_n のうち最大のものが3である確率

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-3)^2=3$ となる確率

(3) $(a_1-3)(a_2-3)\cdots(a_n-3)=3$ となる確率

34. 半径1の円周上に12個の点 A_1，A_2，…，A_{12} が反時計まわりに等間隔に並んでいる．この12個の点から異なる3個を無作為に選んで，それらを頂点とする三角形をつくり，その面積を S とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) S のとり得る値のうち，$S \geqq 1$ を満たす値をすべて求めよ．

(2) $S \geqq 1$ となる確率を求めよ．

35. 赤いカードが6枚，白いカードが6枚ある．この12枚を4枚ずつ3つの組に分けるとき，次の各問いに答えよ．

(1) 各組から2枚ずつ計6枚のカードを取り出すとき，少なくとも1枚は白いカードが含まれている確率を求めよ．

(2) 各組から1枚ずつ計3枚のカードを取り出すとき，すべてが赤いカードである確率を求めよ．

36. 表と裏が等確率で出る硬貨を投げるとき，k 回目（$k=1, 2, \ldots$）で表が出れば $a_k=1$，裏が出れば $a_k=0$，さらに，整数 A_n（n は自然数）を $A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k 2^k$ と定める．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 整数 A_n と整数 $B_n=\sum_{k=1}^{n} a_k(-1)^k$ は3で割り切った余りが等しいことを示せ．

(2) A_{2n} が3の倍数となる確率 p_n を求めよ．

37. 自然数 m に対して，その正の約数の総和が $2m$ となるとき，m を完全数という．例えば，6の正の約数は1，2，3，6であり，$1+2+3+6=12=2\times 6$ となることか

ら，6 は完全数である．次の各問いに答えよ．

(1) p^n（p は素数，n は自然数）という形の完全数は存在しないことを証明せよ．

(2) pq（p，q は異なる素数）という形の完全数を求めよ．

38. 3 進法で表された自然数 X_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ を次の 2 つの規則により定める．

（i）$X_1=10_{(3)}$

（ii）X_n の各位の数字に

0 ならば「01」，1 ならば「20」，2 ならば「10」に置き換える

という操作を行ってできる自然数を X_{n+1} とする．

例えば，$X_1=10_{(3)}$，$X_2=2001_{(3)}$，$X_3=10010120_{(3)}$ である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 3 進法で表された数を 2 で割ったときの余りは，各位の数の和を 2 で割ったときの余りと一致することを示せ．

(2) X_n の各位の数字の中の 1 の個数を l_n とするとき，l_{n+1} を l_n を用いて表せ．

(3) すべての自然数 n に対して，X_n は奇数であることを示せ．

39. 次の各問いに答えよ．

(1) 自然数 x，y が $xy-3x-2y+12=0$ を満たすとき，x，y の値の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(2) 実数を係数とする関数 $f(x)=ax^2+bx+1$ がある．$f(1)$，$f(-1)$ がともに整数であるとき，

（i）$f(1)=p$，$f(-1)=q$ とおくとき，a，b を p，q で表せ．

（ii）任意の整数 n に対して，$f(n)$ は整数となることを証明せよ．

40. n を正の整数とする．次の各問いに答えよ．

(1) $2x+3y=6n$ を満たす正の整数 x，y の組の個数を求めよ．

(2) $6n<2x+3y<12n$ を満たす正の整数 x，y の組の個数を求めよ．

【答】

1.（1）$2x^2+38x-49$　（2）$2x^4-9^3+2x^2+36x-40$　（3）3

2.（1）$-2<a<0,\ 0<a<6$　（2）36

3.（$a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 0),\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

4.（1）$-6<a<-4\sqrt{2}$
（2）$-6<a<-4\sqrt{2}$ のとき 4 個，$a=6$ のとき 3 個，
$a<-6,\ a=-4\sqrt{2}$ のとき 2 個，$a>-4\sqrt{2}$ のとき 0 個

5.　$a=-2,\ -3,\ x=\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}i$

6.（1）$x=7,\ y=5$ のとき，最大値 74，$x=2,\ y=2$ のとき，最小値 8
（2）$x=1,\ y=3$ のとき，最大値 4，$x=4,\ y=0$ のとき，最小値 $\frac{1}{4}$

7.　略

8.（1）$\left(\frac{m}{2},\ m-2\right)$　（2）放物線 $y=2x^2-2x+2$ の $0\leqq x\leqq 2$ を満たす部分

9.（1）$(2,\ -1),(3,\ 2)$　（2）直線 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$　（3）$=-\frac{3}{2}$

10.（1）略
（2）最大値 $2\sqrt{2}a+\frac{a^2}{2}$，
最小値 $0<a\leqq\sqrt{2}$ のとき $-2\sqrt{2}a+\frac{a^2}{2}$，$a\geqq\sqrt{2}$ のとき $-2-\frac{a^2}{2}$

11.（1）$0\leqq\alpha\leqq\frac{6}{7}$　（2）$0\leqq\alpha\leqq\frac{14}{31}$

12.（1）$x^2+(y-t)^2=\frac{t^2+4}{4}$　（2）略

13.　$\frac{2\sqrt{70}}{15}$

14.（1）$\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$　（2）$\frac{2}{3}$

15.（1）略　（2）$2,\ -1+\sqrt{6}$

16. （1） $3x+4y=3xy$ （2） $x=\dfrac{8}{3}$，$y=2$ のとき，$\dfrac{16\sqrt{2}}{9}$

17. （1） $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ （2） $\dfrac{1}{2}$

18. （1） $\dfrac{t}{3-t}\vec{a}+\dfrac{t}{3-t}\vec{b}$ （2） $t=\dfrac{1}{2}$，体積 $\dfrac{\sqrt{5}}{15}$

19. （1） 略 （2） 略 （3） 略

20. （1） C(2, 0, 0)，D(0, 2, 0) （2） 3 （3） $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

21. （1） $s+2t+1=0$，$t\neq 0$ （2） 略

22. （1） BC $=7$，CA $=5$ （2） $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$

23. （1） OQ $=2s-1$，OR $=2(2s-1)$ （2） $(1-s)\vec{a}+(1-s)\vec{b}$ （3） $\dfrac{1}{2}<s<\dfrac{2}{3}$

24. （1） $x_{n+2}=x_n+x_{n+1}$ （2） 144 個

25. （1） $a_n=(n+1)\cdot 2^{n-1}$，$b_n=\dfrac{1-2n}{2(n+1)}$ （2） $(3-2n)\cdot 2^{n-1}-\dfrac{3}{2}$

26. （1） $a_{n+1}=b_n+c_n$，$b_{n+1}=a_n+b_n+c_n$，$c_{n+1}=a_n$ （2） 2^{n-1} （3） $3\cdot 2^{n-1}-2$

27. （1） 300 番目 （2） $\dfrac{32}{25}$ （3） 42 個

28. （1） 略 （2） 略

29. （1） 150 個 （2） 286 通り （3） 165 通り

30. （1） 96 個 （ii） 166 個 （2） 979920

31. （1） $\dfrac{55}{84}$ （2） $\dfrac{17}{42}$

32. （1） $\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2^{n+1}}$ （2） $n=6,\ 7$

33. （1） $\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{3^n}$ （2） $\dfrac{8n(n-1)(n-2)}{6(n+1)}$ （3） $\dfrac{n}{4\cdot 3^n}$

34. （1） 1，$\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ （2） $\dfrac{2}{11}$

35. （1） $\dfrac{923}{924}$ （2） $\dfrac{1}{11}$

36. (1) 略　(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

37. (1) 略　(2) 6

38. (1) 略　(2) $l_{n+1}=2^2-l_n$　(3) 略

39. (1) $(x,\ y)=(1,\ 9),\ (5,\ 1),\ (8,\ 2)$
(2) (i) $a=\dfrac{p+q-2}{2},\ b=\dfrac{p-q}{2}$　(ii) 略

40. (1) $(n-1)$ 個　(2) $(9n^2-4n+1)$ 個

$\Im\int\hbar\, i^2$

(T20−M0122)