2019 年度　平日講習

数学 I・II・A・B 演習

東京都立青山高等学校

はじめに

数学 I・II・A・B の問題演習は，1 学期から各自ですすめてきていることだろう．2 学期以降は，より実践的な問題演習を行っていく必要がある．

この講習で扱う問題の多くは，各単元にまたがったもので構成されている．そのため，難易度としては「標準 〜 標準 $+\alpha$」であるが，難しく感じるかもしれない．

また，各問題の主要なテーマとなっている単元はあるが，配列はそのテーマごとに区分していない．どの単元がテーマとなっているかの先入観がない状態で，問題に取り組んで欲しい．

本番の入試問題では，複数の単元にまたがり，主要なテーマとなる単元が表面に現れない問題も多くある．そのような問題であっても「標準 〜 標準 $+\alpha$」の難易度の問題であれば，得点をすることが欠かせない．ぜひ，入試本番でも本テキストのような問題に取り組んでいけるようにしよう．

【1】

xy 平面上に，放物線 $C : y = x^2$，直線 $l : y = mx - m + 2$ がある．C と l の交点を A，B，線分 AB の中点を M とし，A，B における C の接線の交点を N とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) N の座標を m を用いて表せ.

(2) $\triangle\mathrm{ABN} \leqq 4\sqrt{2}$ となるとき，点 M の軌跡を求めよ.

NOTE

【2】

$\triangle$OAB において，OA $=4$，OB $=3$，$\cos\angle$AOB $=\dfrac{1}{3}$ が成り立つ．辺 OA，OB 上にそれぞれ点 P，Q を，直線 PQ が $\triangle$OAB の重心 G を通るようにとる．OP $=x$，OQ $=y$ とおくとき，次の各問いに答えよ．ただし，$x>0$，$y>0$ とする．

(1) x，y の満たす関係式を求めよ．

(2) $\triangle$OPQ の面積の最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ．

✎ NOTE

【3】

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は

$$a_1=2,\ a_{n+1}-2a_n=2^n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$b_1=-\frac{1}{4},\ nb_{n+1}-(n+1)b_n=\frac{n-1}{n+2} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

を満たしている．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) a_n，b_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ を求めよ．

NOTE

【4】

6 個の数字 0，1，2，3，4，5 を用いて 4 桁の自然数をつくるとき，次の各問いに答えよ．ただし，1 つの数字は 1 回しか使わないものとする．

(1) (i) 3 の倍数となるものは何個あるか.

(ii) 3 の倍数または 5 の倍数となるものは何個あるか.

(2) 得られる自然数の総和を求めよ．

NOTE

【5】

実数を係数とする多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$（ただし，$a \fallingdotseq 0$）がある．方程式 $x^4=x$ のすべての解が方程式 $\{f(x)\}^2=f(x)$ を満たすとき，a，b，c の値の組をすべて求めよ．

NOTE

【6】

1 個のサイコロを n 回続けて振り，出た目の数を順に a_1，a_2，...，a_n とする．このとき，次の確率を求めよ．ただし，$n \geqq 3$ とする．

(1) a_1，a_2，...，a_n のうち最大のものが 3 である確率

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - 3)^2 = 3$ となる確率

(3) $(a_1 - 3)(a_2 - 3)\cdots(a_n - 3) = 3$ となる確率

NOTE

【7】

座標平面上に，放物線 $C : y = \dfrac{1}{4}x^2$ と点 P がある．いま，P から C に異なる 2 本の接線を引くことができて，その 2 本の接線のなす角が 60° より小さくなるような点 P の存在する範囲を図示せよ．

NOTE

【8】

a を実数の定数とするとき，円 $C : x^2+y^2+(3a-2)x-(a+2)y-7a-3=0$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 円 C は実数 a の値にかかわらずつねに定点を通ることを示し，定点の座標を求めよ

(2) 円 C の中心を P とするとき，P の軌跡を求めよ．

(3) 円 C が円 $C' : x^2+y^2+6y+1=0$ と接するとき，a の値を求めよ．

NOTE

【9】

n を 2 以上の整数とする．n 個の 0 でない実数 a_1，a_2，$\ldots$，a_n が次の 2 つ条件

（ⅰ）$a_{k+1} = \dfrac{a_1 + a_k}{1 - a_1 a_k}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$

（ⅱ）$a_1 + a_n = 0$

を満たすとき，次の各問いに答えよ．

(1) $a_2 + a_{n-1} = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) n は偶数であることを示せ．

NOTE

【10】

xyz 空間内の 8 点

$$\mathrm{A_1}(1,\ 1,\ 1),\quad \mathrm{A_2}(-1,\ 1,\ 1),\quad \mathrm{A_3}(-1,\ -1,\ 1),\quad \mathrm{A_4}(1,\ -1,\ 1),$$
$$\mathrm{A_5}(1,\ 1,\ -1),\quad \mathrm{A_6}(-1,\ 1,\ -1),\quad \mathrm{A_7}(-1,\ -1,\ -1),\quad \mathrm{A_8}(1,\ -1,\ -1)$$

を頂点とする立方体がある．いま，この立方体を xy 平面上の直線 $y=-x$，$z=0$ を軸に回転させ，点 $\mathrm{A_1}$ を z 軸上の正の部分に移動させる．点 A_i $(1 \leqq i \leqq 8)$ が点 B_i に移るとするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 点 $\mathrm{B_5}$ の座標を求めよ．

(2) 面 $\mathrm{B_5B_6B_7B_8}$ において，z 成分が 0 以上である部分の面積を求めよ．

NOTE

【11】

次の各問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) x の 2 次方程式 $x^2+ax+8=0$ が 2 より大きい異なる 2 つの実数解をもつとき，a のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) x の 4 次方程式 $(x^2+2x+3)^2+a(x^2+2x+3)+8=0$ の実数解の個数を調べよ．

NOTE

【12】

xy 平面において不等式 $x^2+y^2 \leqq a^2$ であらわされる領域を S とし，点 $(x,\ y)$ が S 全体をうごくとき，次の各問いに答えよ．ただし，a を正の定数とする．

(1) $X=x+y$，$Y=xy$ とするとき，点 $(X,\ Y)$ の存在する領域 T を XY 平面に図示せよ．

(2) $2(x+y)+xy$ の最大値と最小値を求めよ．

NOTE

【13】

4 次式 $f(x)$ を $x-1$，x^2+x+1 で割った余りがそれぞれ -9，$36x-51$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を x^3-1 で割った余りを求めよ．

(2) $f(x)$ が $(x-2)^2$ で割り切れるとき，$f(x)$ を求めよ．

(3) (2) のとき，$f(n)$ が素数となるような整数 n の値を求めよ．

NOTE

【14】

四面体 OABC において $\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ が成り立つ．いま，$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とし，線分 OG を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を E，直線 CE と平面 OAB の交点を F とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ．

(2) 直線 CF が平面 OAB と垂直であるとき，t の値を求めよ．また，このとき，四面体 EABC の体積を求めよ．

NOTE

【15】

座標平面上に，円 $C: x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$，直線 $l: y = -1$ および点 A(1, 0) がある．A から出た光線は l 上の点 P$(\alpha, -1)$ で反射するものとし，光線は C を通過することができる．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) P で反射した光線が C の周または内部を通るような α の値の範囲を求めよ．

(2) P で反射した光線は，直線 $m: y = x + 2$ 上の点 Q で反射するものとする．Q で反射した光線が C の周または内部を通るような α の値の範囲を求めよ．

NOTE

【16】

a を整数の定数とする．3 次方程式 $9x^3-(3a+7)x-a-4=0$ が整数でない正の有理数の解をもつような a の値を求めよ．また，そのうち最大の a に対する 3 次方程式の解をすべて求めよ．

NOTE

【17】

半径 1 の円周上に 12 個の点 A_1, A_2, . . . , A_{12} が反時計まわりに等間隔に並んでいる．この 12 個の点から異なる 3 個を無作為に選んで，それらを頂点とする三角形をつくり，その面積を S とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) S のとり得る値のうち，$S \geqq 1$ を満たす値をすべて求めよ．
(2) $S \geqq 1$ となる確率を求めよ．

NOTE

【18】

空間内の定点 O から等距離にある 4 点 A，B，C，D について，条件

$$\mathrm{AD} = \mathrm{BC},\ \mathrm{BD} = \mathrm{CA},\ \mathrm{CD} = \mathrm{AB} \cdots (*)$$

を考える．点 X を

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

で定めるとき，次の命題が成り立つことをそれぞれ示せ．

(1) 点 X が点 O に一致するならば，4 点 A，B，C，D は $(*)$ を満たす．

(2) $(*)$ を満たす 4 点 A，B，C，D は点 X から等距離にある．

(3) 4 点 A，B，C，D が同一平面上になく，かつ $(*)$ を満たすならば，点 X は点 O に一致する．

NOTE

【19】

xy 平面上に点 T$(0,\ t)$ を中心とする円 C_t がある．いま，点 A$(2,\ 0)$ を端点とし，C_t に接する 2 本の半直線があり，この 2 本の半直線のなす角が 60° であるとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) C_t の方程式を求めよ．

(2) t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，C_t の周が通過する領域を図示せよ．

NOTE

【20】

n を自然数とする．0，1，2 の 3 種類の数字を次の条件を満たすように左から順に n 個並べて数列をつくる．

（条件）　0 を連続して並べることはなく，2 の次に数字を並べるときは必ず 0 を並べる

このような数列のうち，左端が 0，1，2 であるものの個数をそれぞれ a_n，b_n，c_n とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n を用いて表せ．
(2) a_n を求めよ．
(3) $\sum_{k=1}^{n} b_k$ を求めよ．

NOTE

【21】

赤いカードが 6 枚，白いカードが 6 枚ある．この 12 枚を 4 枚ずつ 3 つの組に分けるとき，次の各問いに答えよ．

(1) 各組から 2 枚ずつ計 6 枚のカードを取り出すとき，少なくとも 1 枚は白いカードが含まれている確率を求めよ．

(2) 各組から 1 枚ずつ計 3 枚のカードを取り出すとき，すべてが赤いカードである確率を求めよ．

✎ NOTE

【22】

座標空間に，2 点 A(2, 3, 3)，B(−2, −1, 1)，および x 軸上に点 C，y 軸上に点 D があり，AC = BC，AD = BD を満たしている．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) C，D の座標を求めよ．
(2) 直線 AB 上の点 P に対して，AB ⊥ CP となるとき，△PCD の面積を求めよ．
(3) 点 C から平面 ABD に下した垂線の長さを求めよ．

NOTE

【23】

a, b は 1 から 100 までの自然数とする．これを使ってできる 100^2 個の分数 $\dfrac{b}{a}$（分数は約分しないものとする）を，以下の規則にしたがって左から順に並べて得られる数列を考える．ただし，$\max(a,\ b)$ は a, b のうち小さくない方を表すものとする．

（ i ）$\max(a,\ b)$ の小さい分数ほど左側にある

（ii）$\max(a,\ b)$ が同じときは，値の小さい分数ほど左側にある

(1) $\dfrac{11}{18}$ は左から何番目にあるか.

(2) 左から 1000 番目にある分数を求めよ.

(3) 左から 1000 番目までに 9 以上の分数は何個あるか.

NOTE

【24】

平面上に $\triangle$ABC がある．実数 s，t に対し，平面上の 2 点 P，Q は次の条件

$$(t+1)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(-t+1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}+(s+t-1)\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

$$(-s-t)\overrightarrow{\mathrm{QA}}+(2s+1)\overrightarrow{\mathrm{QB}}+2t\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$$

を満たし，P $\neq$ Q ならば，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 条件を満たす点 P，Q が存在するための s と t が満たす条件を求めよ．

(2) (1) の条件を満たして s，t が変化するとき，線分 PQ の中点 M の存在範囲を図示せよ．

NOTE

【25】

n を正の整数とする．次の各問いに答えよ．

(1) $2x+3y=6n$ を満たす正の整数 x，y の組の個数を求めよ．

(2) $6n<2x+3y<12n$ を満たす正の整数 x，y の組の個数を求めよ．

NOTE

【26】

$\mathrm{AB}=3$ である $\triangle\mathrm{ABD}$ の内心 I について $7\overrightarrow{\mathrm{IA}}+5\overrightarrow{\mathrm{IB}}+3\overrightarrow{\mathrm{IC}}=\vec{0}$ が成り立つとき，次の各問いに答えよ．

(1) BC，CA の長さを求めよ．

(2) 点 P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円上を動くとき，$v_p=\left|3\overrightarrow{\mathrm{IP}}-\overrightarrow{\mathrm{IA}}-\overrightarrow{\mathrm{IB}}-\overrightarrow{\mathrm{IC}}\right|$ の最大値を求めよ．

NOTE

【27】

1 辺の長さが 1 の正三角形 OAB がある．いま, 線分 AB を $s:(1-s)\left(\frac{1}{2}<s<1\right)$ に内分する点 P をとり，P を通り AB に垂直な直線と直線 OB の交点を Q とし，Q を通り OB に垂直な直線と直線 OA の交点を R とする．さらに，R を通り OA に垂直な直線と直線 PQ の交点を X とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 線分 OQ，OR の長さを求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(3) 点 X が三角形 OAB の内部（周上を含まない）にあるとき，s のとり得る値の範囲を求めよ．

NOTE

【28】

表と裏が等確率で出る硬貨を投げるとき，k 回目（$k=1,\ 2,\ \ldots$）で表が出れば $a_k=1$，裏が出れば $a_k=0$，さらに，整数 A_n（n は自然数）を $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k2^k$ と定める．このとき，次の各問いに答えよ．

（1）整数 A_n と整数 $B_n=\sum_{k=1}^{n}a_k(-1)^k$ は 3 で割り切った余りが等しいことを示せ．

（2）A_{2n} が 3 の倍数となる確率 p_n を求めよ．

NOTE

【答】

1. (1) $\left(\dfrac{m}{2},\ m-2\right)$　(2) 放物線 $y=2x^2-2x+2$ の $0 \leqq x \leqq 2$ を満たす部分

2. (1) $3x+4y=3xy$　(2) $x=\dfrac{8}{3}$，$y=2$ のとき，$\dfrac{16\sqrt{2}}{9}$

3. (1) $a_n=(n+1)\cdot 2^{n-1}$，$b_n=\dfrac{1-2n}{2(n+1)}$　(2) $(3-2n)\cdot 2^{n-1}-\dfrac{3}{2}$

4. (1) 96 個　(ii) 166 個　(2) 979920

5. $(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 0),\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right),\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

6. (1) $\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{3^n}$　(2) $\dfrac{8n(n-1)(n-2)}{6(n+1)}$　(3) $\dfrac{n}{4\cdot 3^n}$

7. 略

8. (1) $(2,\ -1),(3,\ 2)$　(2) 直線 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$　(3) $=-\dfrac{3}{2}$

9. (1) 略　(2) 略

10. (1) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$　(2) $\dfrac{1}{2}$

11. (1) $-6<a<-4\sqrt{2}$
(2) $-6<a<-4\sqrt{2}$ のとき 4 個，$a=6$ のとき 3 個，
$a<-6$，$a=-4\sqrt{2}$ のとき 2 個，$a>-4\sqrt{2}$ のとき 0 個

12. (1) 略
(2) 最大値 $2\sqrt{2}a+\dfrac{a^2}{2}$，
最小値 $0<a \leqq \sqrt{2}$ のとき $-2\sqrt{2}a+\dfrac{a^2}{2}$，$a \geqq \sqrt{2}$ のとき $-2-\dfrac{a^2}{2}$

13. (1) $2x^2+38x-49$　(2) $2x^4-9^3+2x^2+36x-40$　(3) 3

14. (1) $\dfrac{t}{3-t}\vec{a}+\dfrac{t}{3-t}\vec{b}$　(2) $t=\dfrac{1}{2}$，体積 $\dfrac{\sqrt{5}}{15}$

15. (1) $0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{6}{7}$　(2) $0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{14}{31}$

16. $a=-2,\ -3$，$x=\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}i$

17.（1）1，$\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　（2）$\dfrac{2}{11}$

18.（1）略　（2）略　（3）略

19.（1）$x^2+(y-t)^2=\dfrac{t^2+4}{4}$　（2）略

20.（1）$a_{n+1}=b_n+c_n$，$b_{n+1}=a_n+b_n+c_n$，$c_{n+1}=a_n$　（2）2^{n-1}　（3）$3\cdot 2^{n-1}-2$

21.（1）$\dfrac{923}{924}$　（2）$\dfrac{1}{11}$

22.（1）C(2，0，0)，D(0，2，0)　（2）3　（3）$\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

23.（1）300 番目　（2）$\dfrac{32}{25}$　（3）42 個

24.（1）$s+2t+1=0$，$t\fallingdotseq 0$　（2）略

25.（1）$(n-1)$ 個　（2）$(9n^2-4n+1)$ 個

26.（1）BC $=7$，CA $=5$　（2）$\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$

27.（1）OQ $=2s-1$，OR $=2(2s-1)$　（2）$(1-s)\vec{a}+(1-s)\vec{b}$　（3）$\dfrac{1}{2}<s<\dfrac{2}{3}$

28.（1）略　（2）$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

NOTE

$\Im\int\hbar\, i^2$

(L19−M0210)