2025 年度　夏期講習

数学 II・B・C 演習

東京都立狛江高等学校

はじめに

本テキストは，各分野ごとに 2 ～ 3 題の例題と 1 題の問題から構成されている．大学入試において，理系と文系の両方に共通の出題分野という視点から，

数学 II『図形と方程式』『三角関数』『指数関数』『対数関数』『微分法』『積分法』
数学 B『数列』
数学 C『ベクトル』

の 8 分野を扱っている．

なお，数学 B の『統計的な推測』，数学 C の『複素平面』『式と曲線』は扱っていない．『統計的な推測』は文系で大学入学共通テストを受験する場合，『複素平面』『式と曲線』は理系で受験する場合は必要である．扱っていないからと言って，重要な分野ではないという意味ではないことを断っておく．

講習に臨む際には，まず，例題の解答を隠して解いた後，自分の解答とテキストの解答とを見比べよう．そして，テキストの解答と異なる解答をしていた場合や誤った解答をしていた場合は，解答をよく読み，もう一度解き直しをして欲しい．答えが出せればそれでよい，とするのではなく，いろいろな解法を身につけておくことが肝要である．その後，問題に取り組んでもらいたい．

各問題は，その前にある例題の解法を組み合わせることで解ける問題である．標準的なレベルの大学入試問題を取り上げている．大学入試問題と言えども基本事項を組み合わせれば解けるようにつくられていることを忘れないで欲しい．

講習では，予習をしてきていることを前提にすすめるので，予習は必ずしてもらいたい．また，復習もするようにしよう．講習中に分かったと思っても，それが分かったつもりであるかもしれない．確実な理解につなげるには，復習は必須の要素である．

夏休みは，受験勉強の天王山と言われる時期である．この時期での学習の仕方で，秋以降の受験勉強に大きな影響が出てくる，と言っても過言ではない．気合が入っている人もいれば，不安でしかたがないという人もいることだろう．どちらの人にとっても，本講習が一助となれることを願っている．

例題 **1** A

方程式 $x^2+y^2-10x+2y+10=0$ はどのような図形を表すか.

解答

$$(x^2-10x+25)+(y^2+2y+1)=25+1-10$$
$$(x-5)^2+(y+1)^2=16$$

よって,

中心 $(5,\ -1)$, 半径 4 の円 … 答

例題 **1 B**

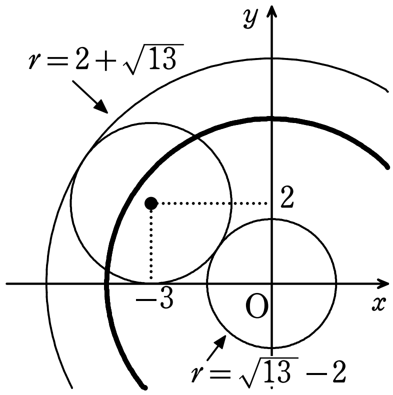
2 つの円

$x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ … ①

$x^2+y^2+6x-4y+9=0$ … ②

が共有点をもつような r の値の範囲を求めよ．

解答



円 ① は，中心 $(0,\ 0)$，半径 r

円 ② は $(x+3)^2+(y-2)^2=4$ より，

中心 $(-3,\ 2)$，半径 2

2 つの円の中心間の距離は，

$\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

2 つの円 ①，② が共有点をもつ条件は，

$|r-2|\leqq\sqrt{13}\leqq r+2$

(i)　$|r-2|\leqq\sqrt{13}$ より，

$-\sqrt{13}\leqq r-2\leqq\sqrt{13}$

したがって，

$2-\sqrt{13}\leqq r\leqq 2+\sqrt{13}$ … ③

(ii)　$\sqrt{13}\leqq r+2$ より，

$\sqrt{13}-2\leqq r$ … ④

$r>0$，③，④ の共通範囲を求めて，

$\sqrt{13}-2\leqq r\leqq 2+\sqrt{13}$ … 答

例題 **1** C

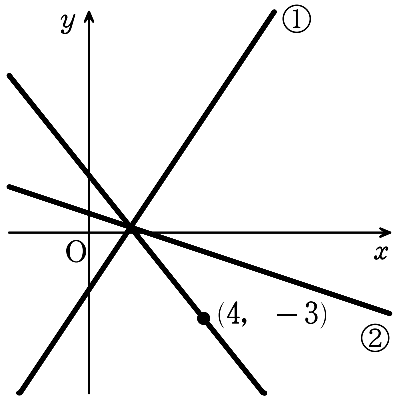
2 直線

$3x-2y=4$ … ①

$x+3y=2$ … ②

の交点と点 $(4,\ -3)$ を通る直線の方程式を求めよ.

解答



k を定数とするとき,

$k(3x-2y-4)+(x+3y-2)=0$ … ③

は, 2 直線 ①, ② の交点を通る直線を表す.

③ が点 $(4,\ -3)$ を通るので, に $x=4$, $y=-3$ を代入して

$14k-7=0$

$k=\dfrac{1}{2}$

これを ③ に代入すると,

$\dfrac{1}{2}(3x-2y-4)+(x+3y-2)=0$

よって,

$5x+4y-8=0$ … 答

1．【図形と方程式】

2 つの円 $x^2+y^2+4x-6y+9=0$ … ①，$x^2+y^2+2x-4y=0$ … ② について，

(1) 2 つの円は，異なる 2 点で交わることを示せ．

(2) 2 つの円の交点を通る直線の方程式を求めよ．

(3) 2 つの円の交点と点 $(1,\ -2)$ を通る円の中心と半径を求めよ．

（芝浦工業大学）

例題 **2** A

放物線 $y=x^2+3x-a$ が直線 $y=-2x+1$ と共有点をもたないように，定数 a の値の範囲を定めよ.

解答

$y=x^2+3x-a$ … ① と $y=-2x+1$ … ② から y を消去して，

$$x^2+3x-a=-2x+1$$

$x^2+5x-a-1=0$ … ③

放物線 ① と直線 ② が共有点をもたないための必要十分条件は，2 次方程式 ③ が実数解をもたないことである.

実数解をもたないための必要十分条件は，③ の判別式を D とすると，

$$D<0$$

ここで，$D=5^2-4(-a-1)=4a+29$ であるから，

$$4a+29<0$$

よって，

$$a<-\frac{29}{4}$$ … 答

例題 **2** B

2 次方程式 $2x^2+3x-1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^3+\beta^3$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

解答

解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$$

$$\alpha\beta=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

(1) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3-3\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{45}{8}$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-\dfrac{3}{2}}{-\dfrac{1}{2}}=3$

例題 **2**C

放物線 $y=x^2+(2t+2)x+2t^2$ の頂点を P とする．t が 0 以上の値をとって変化するとき，頂点 P の軌跡を求めよ．

解答

$y=x^2+(2t+2)x+2t^2$

$=\{x+(t+1)\}^2-(t+1)^2+2t^2$

$=\{x+(t+1)\}^2+t^2-2t-1$

したがって，放物線の頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$x=-t-1$ … ①

$y=t^2-2t-1$ … ②

① より，

$t=-x-1$

② に代入して，

$y=(-x-1)^2-2(-x-1)-1$

$=x^2+4x+2$

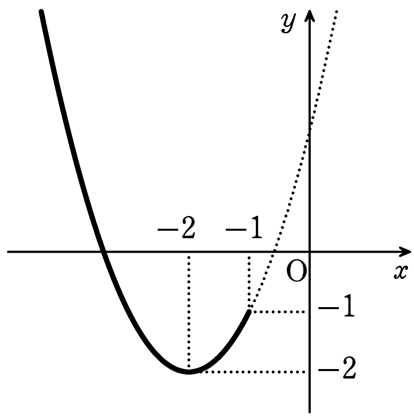
ここで，$t\geqq 0$ であるから，

$-x-1\geqq 0$

$x\leqq -1$

よって，求める軌跡は，

放物線 $y=x^2+4x+2$ の $x\leqq -1$ の部分 … 答



2．【図形と方程式】

放物線 $C：y=x^2+1$ と直線 $\ell：y=mx$ は異なる 2 点 A，B で交わっている．

(1) 定数 m の値の範囲を求めよ．

(2) m の値が変化するとき，線分ABの中点 の軌跡を求めよ．

（星薬科大学）

例題 **3** A

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ．

解答

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ の両辺を 2 乗すると，

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{9}{16}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{16}$$

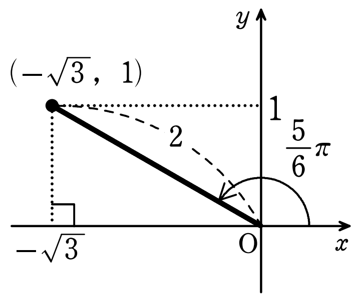
$$\sin\theta\cos\theta=\left(\frac{9}{16}-1\right)\div 2=-\frac{7}{32}$$ … 答

例題 **3** B

関数 $y=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

解答

$y=-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{6}\pi\right)$



$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，

$\dfrac{5}{6}\pi\leqq\theta+\dfrac{5}{6}\pi<\dfrac{17}{6}\pi$

したがって，$\sin\left(\theta+\dfrac{5}{6}\pi\right)$ がとる値の範囲は，

$-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{5}{6}\pi\right)\leqq1$

であるから，

$-2\leqq y\leqq2$

よって，

$\theta+\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{5}{2}\pi$　すなわち　$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$ で最大値 2 … 答

$\theta+\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$　すなわち　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ で最小値 -2 … 答

例題 **3C**

関数 $y=x^2-6x+3\ (-1\leqq x\leqq 4)$ に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

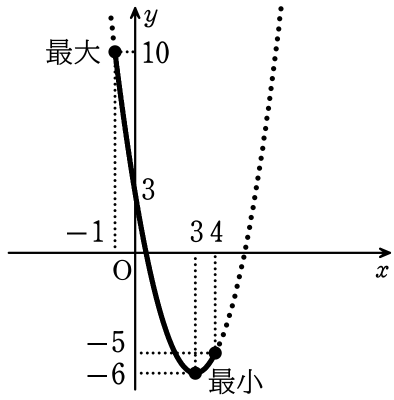
解答

$y=x^2-6x+3$ を変形すると，

$y=(x-3)^2-6$

関数 $y=x^2-6x+3\ (-1\leqq x\leqq 4)$ のグラフは，

頂点が点 $(3,\ -6)$ で，下に凸の放物線の一部であるからグラフは，右の図の実線部分である．



よって，

$x=-1$ で 最大値 10 … 答

$x=3$ で 最小値 -6 … 答

3．　**【三角関数】**

関数 $y=1+2\sin\theta+2\cos\theta+6\sin\theta\cos\theta$ を考える．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする．

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，y を t の式で表せ．

(2)　t のとりうる値の範囲を求めよ．

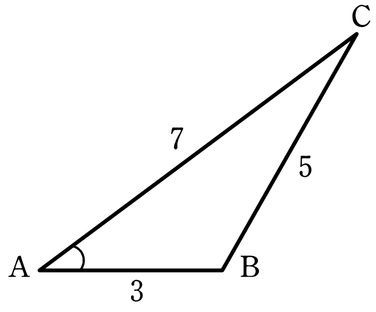
(3)　y のとりうる値の範囲を求めよ．

（中京大学）

例題 4A

△ABC において，$a=5$，$b=7$，$c=3$ とし，面積を S で表す．このとき，$\cos A$，S を求めよ．

解答



余弦定理により，

$$\cos A = \frac{7^2+3^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 3} = \frac{33}{2\cdot 7\cdot 3} = \frac{11}{14}$$

$\sin A > 0$ であるから，

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

よって，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 3\cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdots \text{答}$$

例題 **4** B

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ で $\sin\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，$\cos2\theta$，$\sin\frac{\theta}{2}$ の値を求めよ．

解答

$$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$$
$$=1-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2$$
$$=\frac{1}{8}\cdots\text{答}$$

ここで，$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ であるから，

$$\cos\theta>0$$

したがって，

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$$
$$=\frac{3}{4}$$

よって，

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{8}$$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ より，$\frac{3}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<\pi$ であるから，

$$\sin\frac{\theta}{2}>0$$

よって，

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdots\text{答}$$

例題 **4C**

関数 $y=-\cos^2\theta-\sin\theta+1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値と最小値，および最大値 と 最小値を与える θ の値を求めよ．

解答

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから，

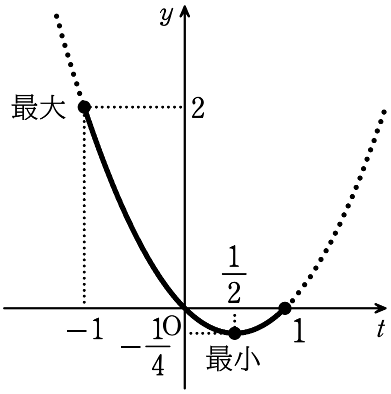
$$y=-(1-\sin^2\theta)-\sin\theta+1$$
$$=\sin^2\theta-\sin\theta$$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，

$$-1\leqq t\leqq 1$$

y を t で表すと，

$$y=t^2-t$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$



$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で，y は，

$t=-1$ のとき，最大値 2

$t=\frac{1}{2}$ のとき，最小値 $-\frac{1}{4}$

また，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，

$t=-1$ となるとき，$\sin\theta=-1$ より，

$$\theta=\frac{3}{2}\pi$$

$t=\frac{1}{2}$ となるとき，$\sin\theta=\frac{1}{2}$ より，

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

よって，この関数は，

$\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき，最大値 2 … 答

$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ のとき，最小値 $-\frac{1}{4}$ … 答

4．【三角関数】

原点を O とする座標平面上に，4 点

$$\mathrm{A}(1,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 1),\ \mathrm{P}_1(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{P}_2(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

をとる．$\triangle \mathrm{AP_1O}$ の面積を S_1，$\triangle \mathrm{BP_2O}$ の面積を S_2 とし，$S = S_1 + \dfrac{1}{2}S_2$ とおく．ただし，$\theta = 0$ のとき $S_1 = 0$，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき $S_2 = 0$ とする．

(1) S を $\sin\theta$ で表せ．

(2) S の最大値と最小値を求めよ．

（新潟大学）

例題 **5** A

$a>0$，$a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}=4$ のとき，$a^{x}+a^{-x}$，$a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}$ の値をそれぞれ求めよ．

解答

$$\begin{aligned} a^{x}+a^{-x} &= \left(a^{\frac{1}{2}x}\right)^2+\left(a^{-\frac{1}{2}x}\right)^2 \\ &= \left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)^2-2a^{\frac{1}{2}x}a^{-\frac{1}{2}x} \\ &= 4^2-2\cdot 1 \\ &= 14 \cdots \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x} &= \left(a^{\frac{1}{2}x}\right)^3+\left(a^{-\frac{1}{2}x}\right)^3 \\ &= \left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)^3-3a^{\frac{1}{2}x}a^{-\frac{1}{2}x}\left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right) \\ &= 4^3-3\cdot 1\cdot 4 \\ &= 52 \cdots \text{答} \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned} a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x} &= \left(a^{\frac{1}{2}x}\right)^3+\left(a^{-\frac{1}{2}x}\right)^3 \\ &= \left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{2}x}\right)^2-a^{\frac{1}{2}x}a^{-\frac{1}{2}x}+\left(a^{-\frac{1}{2}x}\right)^2\right\} \\ &= \left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)\left(a^{x}+a^{-x}-1\right) \\ &= 4(14-1) \\ &= 52 \cdots \text{答} \end{aligned}$$

例題 **5** B

$x>0$ のとき，$2x+\dfrac{3}{x}$ の最小値を求めよ．

解答

$x>0$ より，$2x>0$，$\dfrac{3}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により，

$$2x+\frac{3}{x}\geqq 2\sqrt{2x\cdot\frac{3}{x}}=2\sqrt{6}$$

等号が成り立つのは，$2x=\dfrac{3}{x}$ のときであるから，

$$x^2=\frac{3}{2}$$

$$x=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\ (\because x>0)$$

よって，

$x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき，最小値 $2\sqrt{6}$ … 答

例題 **5**C

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

$$y=-2x^2+3x-4\ (-1\leqq x\leqq 1)$$

解答

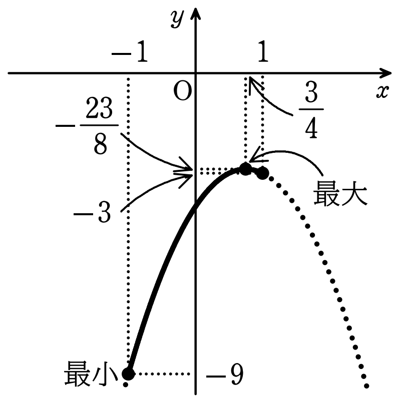
$$y=-2x^2+3x-4$$

$$=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{23}{8}$$

関数 $y=-2x^2+3x-4\ (-1\leqq x\leqq 1)$ のグラフは，

頂点が点 $\left(\frac{3}{4},\ -\frac{23}{8}\right)$ で，上に凸の放物線の一部

である．



よって，関数のグラフは，右図の実線部分であるから，

$x=\frac{3}{4}$ のとき，最大値 $-\frac{23}{8}$ … 答

$x=-1$ のとき，最小値 -9 … 答

5. 【指数関数】

x は実数とし，$y=-(9^x+9^{-x})+2(3^x+3^{-x})+1$ とする．

(1) $3^x+3^{-x}=t$ とおくとき，y を t の式で表せ．

(2) y の最大値およびそのときの x の値を求めよ．

（東北学院大学）

例題 **6** A

次の不等式を解け．

(1)　$\log_3(x+2)\leqq 0$

(2)　$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)>1$

解答

(1)　真数は正であるから，

$$x+2>0$$

$$x>-2 \cdots ①$$

不等式を変形して，

$$\log_3(x+2)\leqq\log_3 1$$

底 3 は 1 より大きいので，

$$x+2\leqq 1$$

$$x\leqq -1 \cdots ②$$

よって，①，② より，

$$-2<x\leqq -1 \cdots \text{答}$$

(2)　真数は正であるから，

$$x-2>0$$

$$x>2 \cdots ①$$

与えられた不等式より，

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいので，

$$x-2<\frac{1}{3}$$

$$x<\frac{7}{3} \cdots ②$$

よって，①，② より，

$$2<x<\frac{7}{3} \cdots \text{答}$$

例題 **6B**

連立不等式 $\begin{cases} y \geqq -x+1 \\ y \leqq -x^2-2x+3 \end{cases}$ の表す領域を図示せよ．

解答

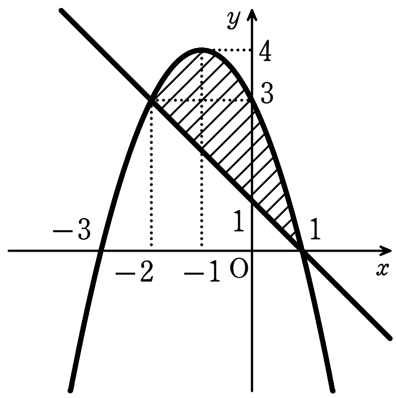
$y \leqq -x^2-2x+3$

$y \leqq -(x+1)^2+4$

よって，求める領域は，

図の斜線部分

ただし，境界線を含む．



６． 【 対数関数 】

不等式 $\log_x(2x-y+1)>2$ が表す領域を図示せよ．ただし，$x>0$ かつ $x\fallingdotseq 1$ とする．

（龍谷大学）

例題 **7** A

点 $(-1,\ 6)$ から関数 $y=x^2-3x+6$ のグラフに引いた接線の方程式を求めよ.

解答

$f(x)=x^2-3x+6$ とすると,

$f'(x)=2x-3$

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は,

$y-(a^2-3a+6)=(2a-3)(x-a)$

$y=(2a-3)x-a^2+6$ …①

この直線が点 $(-1,\ 6)$ を通るから,

$6=(2a-3)\cdot(-1)-a^2+6$

$a^2+2a-3=0$

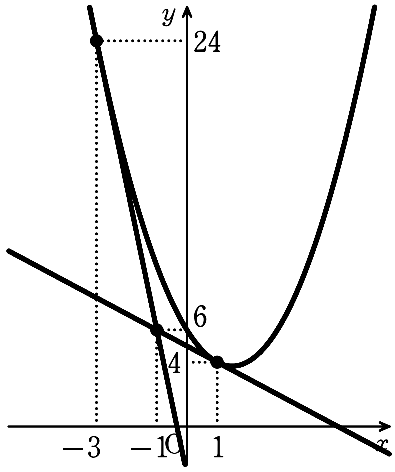
$(a-1)(a+3)=0$

$a=-3,\ 1$

よって,求める接線の方程式は,① より,

$a=-3$ のとき,$y=-9x-3$ … 答

$a=1$ のとき,$y=-x+5$ … 答



例題 7B

3 次方程式 $4x^3-3x+1-a=0$ の異なる実数解の個数が，定数 a の値によってどのように変わるかを調べよ．

解答

与えられた方程式より，

$$4x^3-3x+1=a$$

$g(x)=4x^3-3x+1$ とすると，

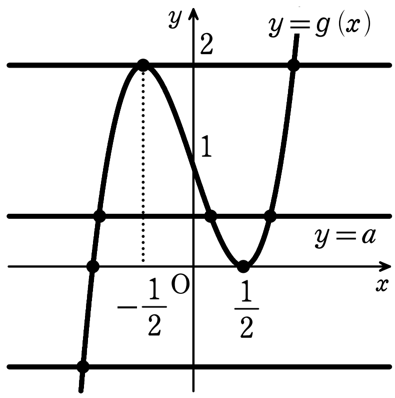
$$\begin{aligned} g'(x)&=12x^2-3 \\ &=3(4x^2-1) \\ &=3(2x+1)(2x-1) \end{aligned}$$

$g'(x)=0$ とすると，

$$x=\pm\frac{1}{2}$$

$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$



したがって，$y=g(x)$ のグラフは右図のようになる．

よって，このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式の実数解の個数に一致するから，

$a<0$，$2<a$ のとき，1 個 … 答

$a=0$，2 のとき，2 個 … 答

$0<a<2$ のとき，3 個 … 答

7. 【 微分法 】

関数 $f(x)=x^3+x+a$（ただし a は実数）が与えられている．点 $(1,\ 0)$ から，曲線 $y=f(x)$ へ相異なる 3 本の接線が引けるとき，a の値の範囲を求めよ．

（札幌大学）

例題 **8** A

放物線 $y=x^2-3x+4$ と直線 $y=2x+a$ がある．2 つのグラフが異なる 2 つの共有点をもつように定数 a の値の範囲を定めよ．

解答

$y=x^2-3x+4$ … ①

$y=2x+a$ … ②

①，② から，y を消去すると，

$x^2-3x+4=2x+a$

$x^2-5x-a+4=0$ … ③

2 次方程式 ③ の判別式を D とすると，

$D=(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-a+4)=4a+9$

2 つのグラフが異なる 2 つの共有点をもつための条件は，③ が異なる 2 つの実数解をもつことであるから，

$D>0$

$4a+9>0$

$a>-\dfrac{9}{4}$ … 答

例題 **8B**

曲線 $y=x^2$ と直線 $y=-x+2$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

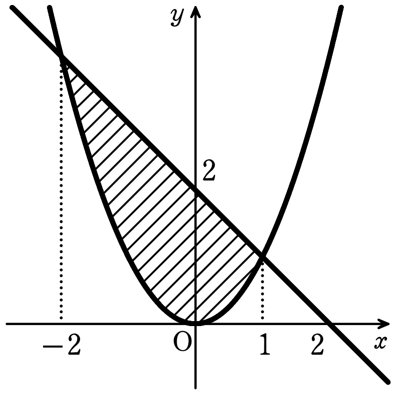
解答

放物線と直線の交点の x 座標は，方程式 $x^2=-x+2$ すなわち $x^2+x-2=0$ を解いて，

$(x+2)(x-1)=0$

$x=-2,\ 1$

よって，右図から求める面積 S は，



$$S=\int_{-2}^{1}\{(-x+2)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx$$

$$=-\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-2)\}^3$$

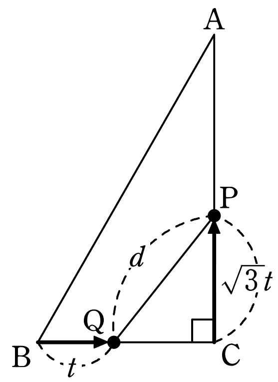
$$=\frac{9}{2}$$ … 答

例題 **8C**

$\angle C=90°$，$CA=3\sqrt{3}$，$BC=3$ の直角三角形 ABC がある．点 P は頂点 C を出発して，辺 CA 上を毎秒 $\sqrt{3}$ の速さで頂点 A まで進む．点 Q は P と同時に頂点 B を出発して，辺BC 上を毎秒 1 の速さで頂点 C まで進む．このとき，P，Q の間の距離の最小値を求めよ．

解答

出発してから t 秒後の P，Q 間の距離を d とする．



P，Q は 3 秒後にそれぞれ A，C に達するので，

$0 \leqq t \leqq 3$ … ①

$CP=\sqrt{3}t$，$CQ=3-t$ であるから，

$$d^2=(\sqrt{3}t)^2+(3-t)^2$$
$$=4t^2-6t+9$$
$$=4\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{27}{4}$$

① の範囲の t について，d^2 は，

$t=\frac{3}{4}$ のとき，最小値 $\frac{27}{4}$

よって，$d>0$ であるから，このとき d も最小となるので，P，Q 間の距離は最小値は，

$\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ … 答

8．【積分法】

点 $(-1,\ 2)$ を通る傾き m の直線 ℓ と，放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積を S とする．

(1) 直線 ℓ と放物線 $y=x^2$ は異なる 2 つの共有点をもつことを示せ．また，共有点の x 座標を α，β とする（ただし，$\alpha<\beta$ とする）とき，$\beta-\alpha$ を m を用いて表せ．

(2) S を m を用いて表せ．また，m がすべての実数値をとって変化するとき，S の最小値とそのときの m の値を求めよ．

（慶應義塾大学）

例題 9A

初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2+n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

解答

$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n=S_n-S_{n-1}&=(2n^2+n)-\{2(n-1)^2+(n-1)\} \\ &=(2n^2+n)-(2n^2-3n+1) \\ &=4n-1 \cdots ① \end{aligned}$$

$n=1$ のとき，

$$a_1=S_1=2\cdot 1^2+1=3$$

ここで，① において $n=1$ とすると，

$$a_1=4\cdot 1-1=3$$

となり，$n=1$ のときにも ① は成り立つ．

よって，

$$a_n=4n-1 \cdots \text{答}$$

例題 **9B**

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$ を求めよ.

解答

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)&=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+2\sum_{k=1}^{n}1\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n\\&=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+9(n+1)+12\}\\&=\frac{1}{3}n(n^2+6n+11)\ \cdots\ 答\end{aligned}$$

例題 **9C**

数列 $\dfrac{1}{3\cdot5}$，$\dfrac{1}{5\cdot7}$，$\dfrac{1}{7\cdot9}$，$\cdots$，$\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ の和を求めよ．

解答

この数列の第 k 項は，

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2k+3)-(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$

よって，求める和を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n+1}}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{n}{3(2n+3)}$$ $\cdots$ 答

9. 【数列】

数列 $\{a_n\}$ において $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = \frac{n(n+3)}{4}$ が成り立つ.

(1) 一般項 a_n を求めよ.

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ.

(3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ を求めよ.

（東京薬科大学）

例題 １０A

袋の中に赤玉 3 個，白玉 4 個が入っている．玉を同時に 3 個取り出すとき，赤玉，白玉の両方が含まれている確率を求めよ．

解答

赤玉と白玉合わせて 7 個の中から 3 個を取り出す方法は，

$_7\mathrm{C}_3$ 通り

赤玉，白玉の両方が含まれているのは，

A：赤玉が 1 個，白玉が 2 個

B：赤玉が 2 個，白玉が 1 個

のどちらかの場合であり，事象 A，B は互いに排反である．

A が起こる確率は，

$$P(A)=\frac{_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{_7\mathrm{C}_3}=\frac{3\times6}{35}=\frac{18}{35}$$

B が起こる確率は，

$$P(B)=\frac{_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{_7\mathrm{C}_3}=\frac{3\times4}{35}=\frac{12}{35}$$

よって，求める確率は，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{18}{35}+\frac{12}{35}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}\cdots\text{答}$$

例題 **１０B**

1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，1 回目は 3 以上の目が出て，2 回目は素数の目が出る確率を求めよ．

解答

1 回目にさいころを投げる試行と 2 回目にさいころを投げる試行は独立である．

1 回目に 3 以上の目が出る確率は，

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

素数の目は 2，3，5 であるから，2 回目に素数の目が出る確率は，

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

よって，求める確率は，

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\ \cdots\ \text{答}$$

例題 **10C**

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義されるとき，一般項 a_n を求めよ．

解答

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+3$ を変形すると，

$$a_{n+1}-6=\frac{1}{2}(a_n-6)$$

$a_1-6=1-6=-5$

よって，数列 $\{a_n-6\}$ は，初項 -5，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$$a_n-6=-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n=-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+6 \cdots \text{答}$$

10. 【数列】

さいころを n 回投げたとき１の目が偶数回出る確率を p_n とする．ただし，１の目が１回も出なかった場合は偶数回出たと考えることにする．

(1) p_1 を求めよ．

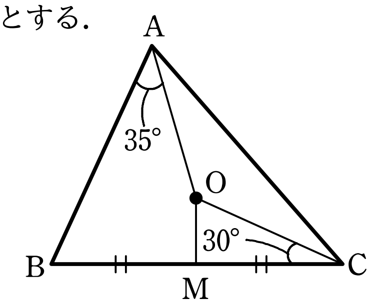
(2) p_{n+1} を p_n で表せ．

(3) p_n ($n=1$，2，3，……) を求めよ．

（姫路工業大学）

例題 **１１A**

右の図において，△ABC の外心を O，辺 BC の中点を M，OM＝4 とする．∠ABC の大きさ，∠AOC の大きさ，△ABC の外接円の半径を求めよ．



解答

OA＝OB＝OC であるから，

∠OBA＝∠OAB＝35°

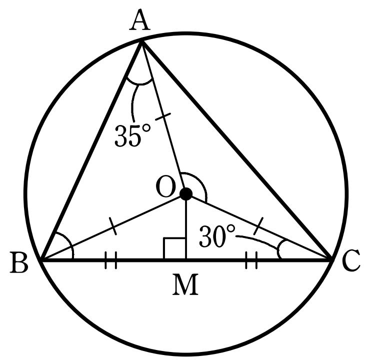
∠OBC＝∠OCB＝30°

したがって，

∠ABC＝∠OBA＋∠OBC

＝35°＋30°

＝65° … 答



円周角の定理より，

∠AOC＝2∠ABC＝130° … 答

点 O は △ABC の外心より，線分 OM は辺 BC の垂直二等分線であるから，△OCM において∠OMC＝90°，∠OCM＝30° となるので，

OC＝2OM＝2･4＝8

よって，外接円の半径は，

8 … 答

例題 **11** B

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直になるように，実数 t の値を定めよ．

解答

$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}+t\vec{b})$ より，

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=0$$

$$|\vec{a}|^2+(t+1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$$

ここで，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ であるから，

$$2^2+(t+1)\cdot(-2)+t\cdot 3^2=0$$

$$7t+2=0$$

$$t=-\frac{2}{7} \cdots \text{答}$$

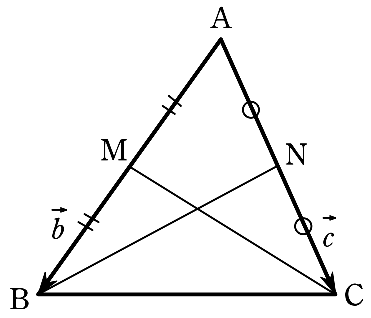
このとき，$\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}+t\vec{b}\neq\vec{0}$ である．

例題 11C

△ABCの辺 AB，ACの中点を，それぞれ M，N とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

(1) $\overrightarrow{BN}$

(2) $\overrightarrow{CM}$



(1) $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{b}$$ … 答

(2) $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$$ … 答

11. 【ベクトル】

$AB=3$，$AC=5$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5$ である三角形 ABC に対して $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする．

三角形 ABC の外接円の中心を O として，$\overrightarrow{AO}$ を $\overrightarrow{AO}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表すとき，実数 s，t の値を求めよ．

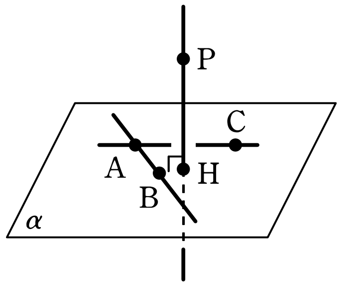
（法政大学）

例題 12A

3点A(1, 7, 0), B(−1, 5, 0), C(−2, 6, 4) を通る平面を α とする.

平面 α 上にない点 P(1, 5, 5) から垂線 PH を下ろすとき，線分 PH の長さと点 H の座標を求めよ.

解答



$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}$

点 H は平面 α 上にあるから,

$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ （s, t は実数）

とおけるので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PH}&=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AP}\\&=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}\\&=s\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2s-3t\\-2s-t+2\\4t-5\end{pmatrix}\cdots①\end{aligned}$$

PH$\perp\alpha$ であるから，$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AB}$ より，$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ なので,

$$-2(-2s-3t)-2(-2s-t+2)+0\cdot(4t-5)=0$$

$$2s+2t-1=0\ \cdots②$$

$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AC}$ より，$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ なので,

$$-3(-2s-3t)-(-2s-t+2)+4(4t-5)=0$$

$$4s+13t-11=0\ \cdots③$$

②, ③ より，$s=-\dfrac{1}{2}$, $t=1$ となるので，① に代入すると,

$$\overrightarrow{PH}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

よって,

$$\mathrm{PH}=|\overrightarrow{PH}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=3\ \cdots \text{答}$$

また，原点を O とすると,

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PH}=\begin{pmatrix}1\\5\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\7\\4\end{pmatrix}$$

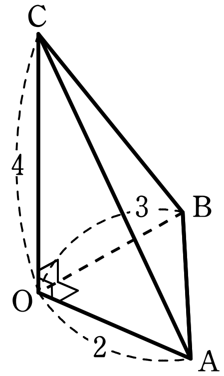
となるので,

H(−1, 7, 4) … 答

例題 **１２**B

四面体 OABC において，$OA=2$，$OB=3$，$OC=4$ であり，3 辺 OA，OB，OC は互いに垂直である．このとき，四面体 OABC の体積を求めよ．

解答



$\triangle OAB$ の面積は，

$$\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$$

よって，$OC=4$ であるから，四面体 OABC の体積は，

$$\frac{1}{3}\times\triangle OAB\times OC=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 4=4 \cdots \text{答}$$

例題 **12**C

$|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=9$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ のとき，$|\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}|$ を求めよ．

解答

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}) \\
&= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{a}\cdot\vec{c} \\
&= 36+9+4+2\cdot 9 \\
&= 67
\end{aligned}
$$

よって，$|\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}|\geqq 0$ であるから，

$|\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}|=\sqrt{67}$ … 答

12.　【ベクトル】

空間内の 4 点 O，A，B，C に対して $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする．これらのベクトルの内積が $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{3}$ を満たすとき，

(1)　点 C を通り△OAB を含む平面に垂直な直線がこの平面と交わる点を D とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　四面体 OABC の体積を求めよ．

（東京学芸大学）

答

1. (1)　略　　(2)　$2x-2y+9=0$　　(3)　中心 $(0,\ 1)$，半径 $\sqrt{10}$

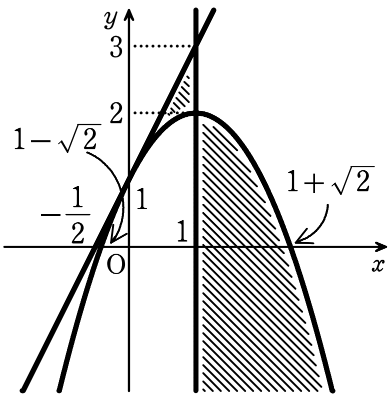
2. (1)　$m<-2$，$2<m$　　(2)　放物線 $y=2x^2$ の $x<-1$，$1<x$ の部分

3. (1)　$y=3t^2+2t-2$　　(2)　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　　(3)　$-\dfrac{7}{3}\leqq y\leqq 4+2\sqrt{2}$

4. (1)　$S=-\dfrac{1}{2}\sin^2\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{4}$　　(2)　最大値 $\dfrac{3}{8}$，最小値 $\dfrac{1}{4}$

5. (1)　$y=-t^2+2t+3$　　(2)　$x=0$ で最大値 3

6.



境界線を含まない

7. $-2<a<-1$

8. (1)　$\beta-\alpha=\sqrt{m^2+4m+8}$　　(2)　$S=\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{m^2+4m+8}\right)^3$；$m=-2$ で最小値 $\dfrac{4}{3}$

9. (1)　$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$　　(2)　$\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$　　(3)　$\dfrac{2n}{n+1}$

10. (1)　$p_1=\dfrac{5}{6}$　　(2)　$p_{n+1}=\dfrac{2}{3}p_n+\dfrac{1}{6}$　　(3)　$p_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}$

11. $s=\dfrac{1}{4}$，$t=\dfrac{9}{20}$

12. (1)　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{b}-\vec{c}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{14}}{36}$

$\Im\int\hbar i^2$

(S25−M2BC)