

2024 年度 夏季講座 B

数学 III (極限・微分法・積分法)

の

計算基礎徹底

共立女子高等学校

【不定形 I】

例題

次の数列の極限を求めよ.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{2n^2 + 5}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 2^n)$

どこが主要部かを見極めよう.

 MEMO

問題

次の数列の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5}{n + 3} \qquad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n+3)}{(3n+1)(n+2)} \qquad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

 MEMO

【不定形 II】

例題

次の数列の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} + 3n}{2n - 1} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n})$$

$\sqrt{\quad}$ を含んだ $\infty - \infty$ 型不定形は、有理化が原則である.

 MEMO

問題

次の数列の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+n}}$$

 MEMO

【 不等式の利用 】

例題

次の数列の極限を求めよ.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2n}{3} \pi$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 2^n)$

先に答えの見当をつけ、それに応じてどう評価すべきかを検討しよう.

 MEMO

問題

次の数列の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos \frac{n}{6} \pi \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2} \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^5 - 3n^4)$$

 MEMO

【 無限級数 】

例題

次の無限級数の収束, 発散を調べ, 収束するときは, その和を求めよ.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \qquad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

部分和を求める作業と, その極限を調べる作業を分離しよう.

 MEMO

問題

次の無限級数の収束, 発散を調べ, 収束するときは, その和を求めよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

 MEMO

【 無理関数の極限 】

【例題】 次の関数の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+2}-x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

不定形の型を見極めた上で、必要に応じて有理化しよう.

MEMO

問題

次の関数の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x + 7} - 3} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{1 + x^2}}{x^3}$$

MEMO

【 三角関数の極限 】

例題

次の関数の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

$\frac{0}{0}$ 型の不定形で $1 - \cos x$ に出会ったら, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{2}$ の活用を考えよう.

 MEMO

問題

次の関数の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2x) \left(1 - \cos \frac{\pi}{x} \right)$

 MEMO

【 指数関数・対数関数の極限 】

例題

次の関数の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^x$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}$

1^∞ 型の不定形ならば, e 関連の極限公式を活用しよう.

 MEMO

問題

次の関数の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2^x - 1}$

 MEMO

【 合成関数の微分法 】

例題

次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

(2) $y = \log(3x - 2)$

頭の中で固まりをつくり、「固まりで微分 × 固まりを微分」しよう.

 MEMO

問題

次の関数を微分せよ.

(1) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

(2) $y = \sin^2 x$

(3) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

(4) $y = \log x(1 - x)$

 MEMO

【 積・商の微分法 】

例題

次の関数を微分せよ.

(1) $y = (x^2 + 1)e^x$

(2) $y = \frac{\sin x}{x}$

(3) $y = e^{2x} \cos x$

「微分, そのまま …」と唱えながら, 微分していこう.

 MEMO

問題

次の関数を微分せよ.

(1) $y = \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{x^2}$

(2) $y = \frac{1}{\tan x}$

(3) $y = \frac{2x-1}{e^x}$

 MEMO

【 やや複雑な微分計算 】

例題

次の関数を微分せよ.

$$(1) y = \frac{x \sin x}{1 + \cos x} \quad (2) y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (3) y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

合成関数・積・商の微分法を合わせて使えるようにしていこう.

 MEMO

問題

次の関数を微分せよ.

(1) $y = x\sqrt{2-x^2}$

(2) $y = \frac{1}{2} \{x\sqrt{x^2+4} + 4\log(x + \sqrt{x^2+4})\}$

(3) $y = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$

 MEMO

【 媒介変数表示の微分法・陰関数の微分法・対数微分法 】

例題

次の関数を微分せよ.

(1) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ (t で表せ) (2) $x^2 + y^2 = 1$ (x と y で表せ)

(3) $y = e^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$)

$\frac{dy}{dx}$ を分数のようにみなしていこう.

MEMO

問題

次の関数を微分せよ.

(1) $x = (1 + \cos t) \cos t$, $y = (1 + \cos t) \sin t$ (t で表せ)

(2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (x と y で表せ)

(3) $y = x^x$ ($x > 0$)

MEMO

【 基本関数の積分法 】

例題

次の積分を計算せよ.

(1) $\int x\sqrt{x} dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

微分する前のもとの関数を思い出そう.

 MEMO

問題

次の積分を計算せよ.

(1) $\int_0^1 x^2 \sqrt{x} dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x - 2 \sin x) dx$

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - \sin x) dx$

 MEMO

【 1 次式を固まりで 】

例題

次の積分を計算せよ.

(1) $\int (2x + 1)^3 dx$

(2) $\int \frac{1}{e^x} dx$

微分する前のもとの関数をつくり出す気持ちで積分しよう.

 MEMO

問題

次の積分を計算せよ.

(1) $\int_2^3 \frac{1}{1-x}$

(2) $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$

(3) $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$

 MEMO

【 積を和に変えて 】

例題

次の積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^1 (x^2 + 1)^3 dx \quad (2) \int \frac{1}{x(x+2)} dx \quad (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

積は和へ，次数は下げるようにしよう.

 MEMO

問題

次の積分を計算せよ.

$$(1) \int_3^5 x(x-3)^2 dx \quad (2) \int \frac{x^3 - 4x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 4} dx \quad (3) \int_0^\pi \sin 5x \sin 2x dx$$

 MEMO

【不定積分の置換積分法】

例題

次の積分を計算せよ.

$$\int x(x^2 + 1)^3 dx$$

(合成関数) × (固まり)' を置換積分の目印としよう.

 MEMO

問題

次の積分を計算せよ.

(1) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$

(2) $\int \tan x dx$

(3) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

 MEMO

【定積分の置換積分法 I】

例題

次の積分を計算せよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx$$

定積分の置換積分法では、積分変数、積分区間、被積分関数の3つを一気に変えよう.

 MEMO

問題

次の積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx \qquad (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan x)^3}{\cos^2 x} dx \qquad (3) \int_e^{e^2} \frac{\log x}{x} dx$$

 MEMO

【 定積分の置換積分法 II 】

例題

次の積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(2) \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$$

4つのパターンを暗記しよう.

 MEMO

問題

次の積分を計算せよ.

(1) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2} dx$

(3) $\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1} dx$

(4) $\int \frac{1}{1+e^x} dx$

MEMO

【不定積分の部分積分法 I】

例題

次の積分を計算せよ.

(1) $\int x \sin x dx$

(2) $\int \log x dx$

$f(x) \times g'(x)$ を $f'(x) \times g(x)$ に変えるとどうなるか考えてみよう.

MEMO

問題

次の積分を計算せよ.

(1) $\int (\log x)^2 dx$

(3) $\int x^2 \sin \pi x dx$

(2) $\int (x-1)e^{-x} dx$

(4) $\int e^x \cos x dx$

 MEMO

【 定積分の部分積分法 】

例題

次の積分を計算せよ.

(1) $\int_1^e x^3 \log x \, dx$

(2) $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)e^{-x} \, dx$

原始関数が求まった所から, 数値を代入していこう.

 MEMO

問題

次の積分を計算せよ.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

(2) $\int_0^1 x \log(x+1) dx$

(3) $\int_1^2 (x^2 + 2x)e^{2x} dx$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos 2x dx$

MEMO

【手法の選択】

例題

次の積分を計算せよ.

(1) $\int \frac{(\log x)^3}{x} dx$

(2) $\int \frac{\log x}{x^3} dx$

(3) $\int \cos^3 x dx$

理屈ではなく、場数を踏んで身体で覚えよう。体育会系かつ！

 MEMO

