2019 年度

数学 III 演習

東京都立青山高等学校

はじめに

2 年生の 3 学期の複素平面から数学 III の学習を本格的にはじめ，3 年生 1 学期に一通りの学習を終えた．4STEP などの問題集やチャート式などの参考書で基本事項の習得もできていることと思う．2 学期以降は，その習得したことを活かして大学入試に出題されるような問題の演習をしていくことが必要である．

ただ，やみくもに難しい問題に取り組んでは，時間の浪費となってしまう．どのような大学であっても，必ず解答できなくては合否に影響を及ぼす問題（小問も含めて）というものはある．いわゆる「標準的な難易度の大学入試問題」というものだ．この冊子には，そのような問題を数学 III 全体にわたって取り上げてある．2 学期の前半は，この難易度の問題を確実に解けることを目指そう．もちろん，スラスラと解ける人もいるだろう．そのような人は，次の段階の難易度の問題に取り組んでいくとよい．習得状況が様々な人がいる中なので，最大公約数的な問題の選択となっていることは理解してもらいたい．

スラスラ解ける人は，難しいと感じている人に積極的に教えて欲しい（教えることは最高の理解度の確認方法！）．また，難しいと感じる人はそのような人にぜひ聞いてみよう．先生という専門家の目線ではなく，同じ高校生という目線での問題へのアプローチ方法は，大いに参考になるはずだ．

大学入試まで，あと約 5 ヶ月，不安も膨らんでくるだろうが，一緒に学ぶ仲間がいれば心強いだろう．ぜひ，「72 期生」の仲間が一丸となって入試に立ち向かってもらいたい．

【 1 】

自然数 n と実数 x に対して，$g_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^{k+1}}{(x^2+1)^k}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $x = 2$ のとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} g_n$ を求めよ．

(2) すべての実数 x に対して，$\lim_{n\to\infty} g_n$ が存在することを示せ．また，$g = \lim_{n\to\infty} g_n$ とおくとき，g を x を用いて表せ．

(3) x の値がすべての実数を変化するとき，(2) で定まった g の最大値と最小値を求めよ．

NOTE

【2】

a を実数の定数とする．曲線 $C : y = e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$ 上の各点における接線のうちで，原点 O を通るものの本数を $n(a)$ で表す．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $n(a)$ を求めよ．

(2) $n(a) = 2$ のとき，その 2 つの接線の接点の間において，C はただ 1 つ変曲点をもつことを示せ．

NOTE

【3】

関数 $f(x)=(x^2+3x)e^{-\frac{x}{2}}$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x+3)e^{-\frac{x}{2}}=0$ を使ってもよい．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $y=f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

(3) k を定数とするとき，方程式 $(x+3)e^{-\frac{x}{2}}=k$ の異なる実数解の個数を，k の値で場合分けをして求めよ．

(4) m を定数とするとき，$y=f(x)$ の表す曲線と直線 $y=mx$ が異なる 3 個の共有点をもつような m の値の範囲を求めよ．

NOTE

【4】

$a>0$，$t>0$ に対して，定積分 $S(a,\ t)=\displaystyle\int_0^{a^2}|\sqrt{x}-\log t|\,dx$ を考える．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) a を固定したとき，t の関数 $S(a,\ t)$ の最小値を求めよ．

(2) (1) において，$S(a,\ t)$ を最小とするような t の値を t_0 とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{t_0-1}{a}$ を求めよ．

NOTE

【5】

n を自然数とする．$x > 0$ に対し，$f(x) = \dfrac{(\log x)^n}{x^2}$ とおく．次の問いに答えよ．必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ であること，および，自然対数の底 e の値は $2.718\cdots$ であることを用いてよい．

(1) 方程式 $f'(x) = 0$ の解を求めよ．

(2) 方程式 $f(x) = 1$ の異なる解の個数を求めよ．

NOTE

【6】

xy 平面上の曲線 $C : y = \dfrac{4x+1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0 \leqq x < 1)$ について，次の各問いに答えよ.

(1) C は下に凸の曲線であることを示せ.

(2) 原点 O を通り，C に接する直線 l の方程式を求めよ.

(3) C と y 軸，l によって囲まれる部分の面積を求めよ.

NOTE

【7】

関数 $f(x)=e^{3x}+e^{-3x}-12(e^x+e^{-x})$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $g(x)=e^x-e^{-x}$ とおく．関数 $g(x)$ は単調増加であることを示せ.

(2) $u=g(x)$ とおくとき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を u を用いて表せ.

(3) 関数 $y=f(x)$ の増減，極値を調べ，そのグラフをかけ.

NOTE

【8】

e は自然対数の底とする．次の各問いに答えよ．

(1) すべての実数 x に対して，不等式 $\dfrac{x^3e^{-x}}{6} \leqq 1-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)e^{-x} \leqq \dfrac{x^3}{6}$ が成り立つことを示せ．

(2) 実数全体を定義域とする関数 $\displaystyle\int_1^e t^{x-1}\,dt$ は，実数全体を定義域とする連続な導関数をもつことを示せ．

NOTE

【９】

（1）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos x\,dx$ であることを示せ.

（2）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx$ の値を求めよ.

NOTE

【 10 】

$f(x)$ は連続関数であり，任意の実数 x に対して，$\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \sin 2x$ を満たすとする．このとき，次の各問いに答えよ．

（1）$g(x) = f(x) - \cos 2x$ とおくとき，$g(x)$ は奇関数であることを示せ.

（2）$x > 0$ のとき，不等式 $\displaystyle\int_{-x}^{x} \{f(t)\}^2\,dt \geqq x + \frac{1}{4}\sin 4x$ が成り立つことを示せ.

NOTE

【11】

次の問いに答えよ．ただし，n は自然数を表す．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式 $\dfrac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \leqq \dfrac{x}{n}$ が成り立つことを示せ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$ の値を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\left(1+\dfrac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\dfrac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^5}{n^6}\right)$ で定めるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

NOTE

【 12 】

座標空間において，xy 平面上を動く点 P，z 軸上の正の部分を動く点 Q があり，PQ $= 1$ を満たしている．線分 PQ が通過する範囲を H とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 線分 PQ と平面 $z = t\ (0 < t < 1)$ が共有点をもつとき，その共有点を R とする．点 $(0,\ 0,\ t)$ に対して，線分 RT の長さの最大値を t を用いて表せ．

(2) 図形 H の体積を求めよ．

NOTE

【13】

(1) 自然数 n に対して, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$ を求めよ.

また, $\dfrac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \dfrac{1}{n}$ を示せ.

(2) 2 以上の自然数 n に対して $\log(n+1) < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \log n$ を示せ.

NOTE

【14】

数列 $\{a_n\}$ が $\sum_{k=1}^{n} a_k = \int_0^{n\pi} |x\sin x|\,dx \ (n=1,\ 2,\ \ldots)$ を満たすとき，次の各問いに答えよ．

（1） a_n を求めよ．

（2） 極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a_k}$ を求めよ．

NOTE

【15】

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ とするとき，次の問いに答えよ．

（1）I_1 および $I_n+I_{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ を求めよ．

（2）不等式 $I_n \geqq I_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ を示せ．

（3）$\lim_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ．

NOTE

【16】

関数 $f(x)$ が $f(x)+\int_0^1 (x-t)f(t)\,dt=-10x^3+6x^2+2x-\dfrac{3}{2}$ を満たすとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $\int_0^1 \{f(t)-xt\}^2\,dt$ を最小にする x の値を求めよ

NOTE

【17】

r を定数とする．関係 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_n = r^2 a_{n-1} + \dfrac{5}{6} r a_{n-2}$ $(n = 3,\ 4,\ \ldots)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ が 0 でない数 α に収束するとき，r と α の値を求めよ．

NOTE

【18】

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ について，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．発散するときは「発散する」と解答せよ．

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 4} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

NOTE

【19】

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \sqrt{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ によって定義されているとき，次の各問いに答えよ．

(1) $a_n > \dfrac{2}{3}n\sqrt{n}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ が成り立つことを示せ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$ を求めよ．

NOTE

【20】

A，B，C を定数とし，x の関数

$$f(x) = Ae^x + B\sin x + Cx\sin x$$

を考える．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ であるための必要十分条件を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在して有限の値であるための必要十分条件を求めよ．

(3) すべての x に対して $|f(x)| \leqq M$ であるような，x によらない定数 M が存在するための必要十分条件を求めよ．

(4) $f(a) = 0$ を満たすいくらでも大きな a が存在するための必要十分条件を求めよ．

（上智大学）

NOTE

【21】

半径 1，中心角 $2\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の扇形 OAB がある．半径 OA，OB 上にそれぞれ点 C，D をとり，さらに弧 AB 上に 2 点 E，F をとって，四角形 CDEF が長方形になるようにする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 長方形 CDEF の面積の最大値 $S(\theta)$ を求めよ．

(2) 扇形 OAB の面積を $T(\theta)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{T(\theta)}$ を求めよ．

NOTE

【22】

曲線 $y=e^{ax+b}$ $(a \geqq 1)$ と曲線 $y=e^{-x}$ が 1 点で交わり，交点におけるそれぞれの接線が垂直に交わっているとする．次の問いに答えよ．

(1) 交点の座標を $(x(a),\ y(a))$ とおくとき，b，$x(a)$，$y(a)$ をそれぞれ a を用いて表せ．

(2) 曲線 $y=e^{ax+b}$ $(a \geqq 1)$ を $C(a)$ で表す．曲線 $C(a)$ と曲線 $C(a+1)$ の交点の x 座標を $X(a)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{a \to \infty}\{X(a)-x(a)\}$ を求めよ．

(3) $X(a)-x(a)$ は $a \geqq 1$ のとき単調減少であることを示せ．

NOTE

【23】

(1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ を利用して，次の極限を求めよ．

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}$$

(2) 座標平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上に 2 点 P，Q があり，点 P の座標は $(1,\ 0)$，点 Q の y 座標は正であるとする．弧 PQ の長さを t とする．ただし，$0<t<\pi$ である．いま，点 $\mathrm{R}(1,\ t^2)$ と点 Q を結ぶ直線と直線 $y=\dfrac{1}{t}$ との交点の x 座標を $X(t)$ とする．このとき，右側からの極限 $\displaystyle\lim_{t\to +0}X(t)$ を求めよ．

NOTE

【24】

n を正の整数とし，$y = n - x^2$ で表されるグラフと x 軸と囲まれ領域を考える．この領域の内部および周に含まれ，x，y 座標の値がともに整数である点の個数を $a(n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $a(5)$ を求めよ．

(2) $\sqrt{n}$ を超えない最大の整数を k とする．$a(n)$ を k と n の多項式で表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}$ を求めよ．

NOTE

【25】

(1) n を2次以上の自然数とする．複素数 z が $z \neq 1$，$z^n = 1$ を満たすとき，

$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$$

は，次の（ア）から（キ）のどれと等しくなるか，根拠を示して1つ選べ．

（ア）0　（イ）$n(z+1)$　（ウ）$n(z-1)$　（エ）$\dfrac{n}{z-1}$

（オ）$\dfrac{n}{(z-1)^2}$　（カ）$-\dfrac{2n}{(z-1)^2}$　（キ）$1-z-n$

(2) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$2\sin\frac{2}{9}\pi + 3\sin\frac{4}{9}\pi + \cdots + 9\sin\frac{16}{9}\pi = -\frac{9}{2\tan\dfrac{\pi}{9}}$$

NOTE

【26】

絶対値が 1 で偏角 θ の複素数を z とし，n を正の整数とする．

(1) $|1-z^2|$ を θ の関数で表せ．

(2) $\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta$ を計算せよ．

NOTE

【27】

複素数 z と w の間には $w=\dfrac{1}{z-\alpha}$ の関係がある．ただし，α は複素数である．複素平面上において，実軸上（ただし，点 α が実軸上にあるときには，点 α を除く）を点 z が動くとき，点 w はある1つの直線上を動く．次の問いに答えよ．

(1) α の満たす条件を求めよ．

(2) 虚軸上（ただし，点 α が虚軸上にあるときには，点 α を除く）を点 z が動くとき，点 w の描く図形を求めよ．

NOTE

【28】

複素平面上の円 C_1：$|z-2i|=1$，円 C_2：$|z-2|=1$ について，次の各問いに答えよ．

(1) z が C_1 上を動くとき，$|z-1|$ の最小値を求めよ．また，その最小値を与える z を求めよ．

(2) z が C_1 上，w が C_2 上を動くとき，$\left|\dfrac{z-1}{w}\right|$ の最小値を求めよ．また，その最小値を与える z，w を求めよ．

(3) z が C_1 上，w が C_2 上を動くとき，$\dfrac{z}{w}$ の偏角 θ のとり得る値の範囲を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

NOTE

【29】

複素平面上に三角形 ABC があり，その原点 A，B，C を表す複素数をそれぞれ z_1，z_2，z_3 とする．複素数 w に対して，$z_1 = wz_3$，$z_2 = wz_1$，$z_3 = wz_2$ が成り立つとき，次の各問いに答えよ．

(1) $1 + w + w^2$ の値を求めよ．

(2) 三角形 ABC はどのような三角形か．

(3) $z = z_1 + 2z_2 + 3z_3$ の表す点を D とすると，三角形 OBD はどのような三角形か．ただし，O は原点である．

NOTE

【30】

z を複素数とし，i を虚数単位とする．

（1）$\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$ が実数となる点 z の集合が表す図形 P を複素平面上に図示せよ．

（2）z が上で求めた図形 P 上を動くときに $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ の集合が表す図形を複素平面上に図示せよ．

NOTE

【31】

楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の焦点を F(4, 0)，F′(−4, 0) とし，第 1 象限にある楕円上の点を P とする．OP $=a$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) PF + PF′ の値を求めよ．

(2) $\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2$ および積 PF・PF′ を a を用いて表せ．

(3) $\angle \mathrm{F'PF}=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，a の値および点 P の座標を求めよ．

✎ NOTE

【32】

xy 平面上において，点 $(0,\ \sqrt{3})$，$(0,\ -\sqrt{3})$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 4 である点の軌跡として定義される楕円を E とする．いま，E 上を動く相異なる 2 点を A，B とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) E の方程式を求めよ．

(2) 2 点 A，B における E の接線の交点を C とする．△ABC の重心 G がつねに E 上にあるように A，B が動くとき，点 C はどのような図形上にあるか．

NOTE

【33】

原点をOとする xy 平面上の曲線 $x^2-y^2=2$ の $x>0$ の部分を C とする．C 上の点Pにおける接線を l，点A(2, 0) を通り，直線 l と垂直な直線を m，直線OPと直線 m の交点をHとする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，点Pの y 座標は0でないものとする．

(1) 点Hの x 座標を求めよ．

(2) 点Hを通り，x 軸と平行な直線と曲線 C の交点をQとする．Pが C 上を動くとき，$\dfrac{\mathrm{QA}}{\mathrm{QH}}$ が一定となることを示し，その値を求めよ．

NOTE

【34】

$x=\sin\theta$，$y=\sin 2\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が表す曲線 C とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を $\cos\theta$ の式で表せ．

(2) $x=a\ (0<a<1)$ における C の接線の方程式が $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}x+b$ であるとき，a，b を求めよ．

(3) a を (2) で求めた値とする．このとき曲線 C と x 軸，2 直線 $x=a$，$x=\sqrt{a}$ のすべてで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

NOTE

【35】

xy 平面において，$x^4+y^4=2xy$ を満たす点 $(x,\ y)$ の全体が表す曲線を C とする．

(1) 曲線 C 上の点 $(0,\ 0)$ 以外の点 $(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とするとき，r^2 を $\sin 2\theta$ の式で表せ.

(2) 点 $(x,\ y)$ が曲線 C 上を動くときの $(x-y)^2$ の最大値を求めよ．ただし，最大値を与える x，y の値を答える必要はない.

NOTE

【36】

楕円 C：$\dfrac{(x+1)^2}{2}+y^2=1$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 原点 O を極，O から x 軸の正方向に向かう半直線を始線とする極座標 $(r,\ \theta)$ における，C の極方程式は $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}$ となることを示せ．ただし，$r>0$ とする．

(2) 原点を通り，直交する任意の 2 直線 l，m に対し，直線 l と C との交点を $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，直線 m と C との交点を $\mathrm{B_1}$，$\mathrm{B_2}$ とする．このとき，$\dfrac{1}{\mathrm{A_1A_2}}+\dfrac{1}{\mathrm{B_1B_2}}$ は定数であることを示し，その値を求めよ．

NOTE

【37】

複素数 α に対して，そのその共役複素数を $\overline{\alpha}$ で表す．α を実数ではない複素数とする．複素平面内の円 C が 1，-1，α を通るならば，C は $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ も通ることを示せ．

NOTE

【38】

複素数 z $(z \neq 1)$ に対して，複素数 w を $w = \dfrac{3z-1}{z-1}$ で定める．また，実部が負であるような複素数の範囲を D とする．次の各問いに答えよ．

(1) z が D の範囲を動くとき，w の動く範囲を複素平面上に図示せよ．

(2) 実数 α が $0 < \alpha < 1$ の範囲を動き，かつ z が D の範囲を動くとき，aw の動く範囲を複素平面上に図示せよ．

NOTE

【39】

xy 平面において，不等式 $\left(\dfrac{x^2}{3}+y^2-1\right)\left(x^2+\dfrac{y^2}{3}-1\right) \leqq 0$ が表す領域の面積を求めよ．

NOTE

【40】

t を媒介変数として，$x = t + \dfrac{1}{t} + \dfrac{5}{2}$，$y = 2t - \dfrac{2}{t}$ で表される曲線を考える．a を定数とするとき，直線 $y = ax + 5$ とこの曲線との共有点が 1 個となるときの a の値を求めよ．

NOTE

【答】

1. (1) $\dfrac{4}{3}$　(2) $\dfrac{x^2}{x^2-x+1}$　(3) 最大値 $\dfrac{4}{3}$，最小値 0

2. (1) $a<-2$，$a>2$ のとき 2，$a=\pm 2$ のとき 1，$-2<a<2$ のとき 0
(2) 略

3. (1) $-\dfrac{1}{2}(x+2)(x-3)e^{-\frac{x}{2}}$　(2) $x=-2$ のとき，最小値 $-2e$
(3) $k>2e^{\frac{1}{2}}$ のとき 0 個，$k=2e^{\frac{1}{2}}$ のとき 1 個，$0<k<2e^{\frac{1}{2}}$ のとき 2 個，$k \leqq 0$ のとき 1 個
(4) $0<m<3$，$3<m<2e^{\frac{1}{2}}$

4. (1) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}a^3$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5. (1) $e^{\frac{\pi}{2}}$，1
(2) $n=1$，3，5 のとき 0 個，$n=2$，4 のとき 1 個，$n=7$ 以上の奇数のとき 2 個，
$n=6$ 以上の偶数のとき 3 個

6. (1) 略　(2) $y=4\sqrt{3}x$　(3) $\dfrac{\pi}{6}+4-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

7. (1) 略　(2) $3u(u-1)(u+1)$　(3) 略

8. (1) 略　(2) 略

9. (1) 略　(2) $\dfrac{\pi\log 2}{8}$

10. (1) 略　(2) 略

11. (1) 略　(2) $\dfrac{1}{6}$　(3) $e^{\frac{1}{6}}$

12. (1) $(1-t^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$　(2) $\dfrac{16}{105}\pi$

13. (1) $\log(n+1)-\log n$　(2) 略

14. (1) $(2n-1)\pi$　(2) $\dfrac{\log 2}{2\pi}$

15. (1) $I_1=\log\sqrt{2}$，$I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$　(2) 略　(3) $\dfrac{1}{2}$

16. (1) $-10x^3+6x^2+3x-2$　(2) $-\dfrac{3}{2}$

17. $r=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{23}{14}$

18. $1+\sqrt{5}$

19. (1) 略　(2) $\dfrac{2}{3}$

20. (1) $A>0$　(2) $A=B=C=0$　(3) $A=C=0$　(4) $A=0$

21. (1) $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$　(2) $\dfrac{1}{2}$

22. (1) $b=-\dfrac{a+1}{2}\log a$，$x(a)=\dfrac{1}{2}\log a$，$y(a)=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) 略

23. (1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{1}{2}$

24. (1) 20　(2) $(2k+1)\left\{(n+1)-\dfrac{1}{3}k(k+1)\right\}$　(3) $\dfrac{4}{3}$

25. (1)（エ）　(2) 略

26. (1) $2|\sin\theta|$　(2) $z\neq\pm1$ のとき $\dfrac{\sin n\theta\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$，$z=\pm1$ のとき 0

27. (1) α は実数
(2) $\alpha=0$ のとき，虚軸上の原点以外の部分，$\alpha\neq0$ のとき，点 $-\dfrac{1}{2\alpha}$ を中心とする半径 $\left|\dfrac{1}{2\alpha}\right|$ の円．ただし，原点を除く．

28. (1) 最小値 $\sqrt{5}-1$，$z=\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{10-2\sqrt{5}}{5}i$
(2) 最小値 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{3}$，$z=\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{10-2\sqrt{5}}{5}i$，$w=3$　(3) $\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

29. (1) 0　(2) 正三角形
(3) $\angle\mathrm{BOD}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{OBD}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{BDO}=\dfrac{\pi}{6}$ である直角三角形

30. (1) 点 i，$-i$ を除く中心 0，半径 1 の円または，実軸（図は略）
(2) 点 0 を除く虚軸または，点 1 を除く中心 0，半径 1 の円（図は略）

31. (1) 10　(2) $\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2=2a^2+32$，$\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF}'=34-a^2$
(3) $a=\sqrt{22}$，$\left(\dfrac{5\sqrt{13}}{4},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

32. (1) $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$　(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$

33.（1）1　（2）$\sqrt{2}$

34.（1）$\dfrac{4\cos^2\theta-2}{\cos\theta}$　（2）$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　（3）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

35.（1）$\dfrac{2\sin 2\theta}{2-\sin^2 2\theta}$　（2）$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

36.（1）略　（2）$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

37. 略

38.（1）略　（2）略

39. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

40. $-\dfrac{82}{9}$，2

$\Im\int\hbar\, i^2$

(T19−M0032)