2024年度

数学III・C演習

共立女子高等学校

【 1 】

$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$ を計算し簡単な形で表せ.

（創価大学）

NOTE

【2】

次の和を求めよ．

（1）$\displaystyle\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k(k+1)}$

（2）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$

（近畿大学・創価大学）

NOTE

【3】

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{3^k}$ を n で表せ.

（東京電機大学）

NOTE

【4】

自然数 n が n 項続いて並ぶ数列

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ \ldots$$

がある．次の問いに答えよ．

(1) 第 2003 項を求めよ．

(2) 初項から第 2003 項までの和を求めよ．

（大阪工業大学）

NOTE

【5】

次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を n で表せ.

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = 5a_n - 8 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

（同志社大学）

NOTE

【6】

次のように定義された数列を $\{a_n\}$ とする．

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくとき，b_n の満たす漸化式を求めよ．

(2) b_n を求めよ．

(3) a_n を求めよ．

（東京農工大学）

NOTE

【7】

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

を満たすとき，一般項 a_n を求めよ．

（信州大学）

NOTE

【8】

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 5} \quad (n \geqq 1)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるために $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ のような数列 $\{b_n\}$ を考えると，$n \geqq 1$ において，関係式 $\boxed{\text{ア}}$ が成り立つ．これをもとに，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると，$a_n = \boxed{\text{イ}}$ となる．

（成蹊大学）

NOTE

【9】

$a_1 = 1$ である数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和 S_n が関係式

$$nS_{n+1} = 3(n+1)S_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $b_n = \dfrac{S_n}{n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ とおくとき，b_n を n を用いて表せ.
(2) a_n を n を用いて表せ.

（宮崎大学）

NOTE

【10】

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

で与えられる数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

となる実数の組 $(\alpha,\ \beta)$ をすべて求めよ．また，これを用いて，一般項 a_n を求めよ．

（福岡大学）

NOTE

【11】

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \quad (n \geqq 1)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 を計算し，一般項 a_n を推定せよ．

(2) 数学的帰納法を用いて，(1) での推定が正しいことを証明せよ．

（宮崎大学）

NOTE

【 12 】

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}+7^{n+1}}{3^n+5^n+7^n}$ を求めよ.

（愛知工業大学）

NOTE

【13】

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$4a_{n+1}-3a_n-2=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ で与えられるとき，

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を求めよ．

（弘前大学）

NOTE

【 14 】

a, b は, $0 < a < b$ を満たす定数とし, n を自然数とする.

(1) 不等式 $n\log_2 b < \log_2(a^n + b^n) < n\log_2 b + 1$ が成り立つことを証明せよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$ を求めよ.

(広島大学)

NOTE

【 15 】

次の無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求め，さらにそのときの級数の和を求めよ．

$$x + x(2 - x^2) + x(2 - x^2)^2 + \cdots + x(2 - x^2)^n + \cdots$$

（東京電機大学）

NOTE

【 16 】

a を正の定数とする．2 つの数列 x_1，x_2，…，x_n，… および y_1，y_2，…，y_n，… を次のように定義する．まず，$x_1 = a$，$y_1 = a$ とする．曲線 $xy = a^2$ 上の点 $(x_n,\ y_n)$ が定まったとき，この点における曲線 $xy = a^2$ の接線と x 軸との交点の x 座標を x_{n+1} とし，x_{n+1} を x 座標としてもつ曲線 $xy = a^2$ 上の点を $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ とする．いま $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 2$ であるとき，a の値を求めよ．

（東京女子大学）

NOTE

【 17 】

$\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{2-\sqrt{x+a}}{x+3} = b$ を満たす $a,\ b$ の値を求めよ.

（日本大学）

NOTE

【 18 】

点 O を中心とする半径 1 の円周上に定点 A がある．半径 OA に直交する弦 PQ をとり，$\angle\mathrm{POA}=\theta$ とする $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$．三角形 APQ の面積を $S(\theta)$ で表すとき，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{S\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$ を求めよ．

（東京理科大学）

NOTE

【 19 】

関数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^2}{x} & (x \fallingdotseq 0 \text{のとき}) \\ 0 & (x=0 \text{のとき})\end{cases}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

（東京都市大学）

NOTE

【 20 】

$f(x)=e^{3x}\cos x$ に対して，$f''(x)=af(x)+bf'(x)$ となるような定数 a，b をそれぞれ求めよ．

（北見工業大学）

NOTE

【21】

曲線 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 上の点 P における接線の傾きが 1 になるときの，P の y 座標を求めよ．

（法政大学）

NOTE

【22】

曲線 $y = \dfrac{e^x}{x}$ の接線で原点を通るものの方程式を求めよ.

（工学院大学）

NOTE

【23】

関数 $f(x) = x(\log x)^2 - x\log x - x + 1$ の極値を求めよ.

（弘前大学）

NOTE

【24】

$y = \dfrac{1-x}{1+x^2}$ の増減，極値，凹凸および変曲点を調べて，そのグラフの概形をかけ.

（富山医科薬科大学）

NOTE

【25】

関数 $f(x)=x^2-2x-4\log(x^2+1)$ の最小値を求めよ.

（城南大学）

NOTE

【26】

曲線 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 上の点 $\left(a,\ \dfrac{1}{1+a^2}\right)$ での接線を l とし，l と y 軸との交点の y 座標を $g(a)$ とする．

(1) $g(a)$ を求めよ．

(2) $g(a)$ が最大になる a の値と $g(a)$ の最大値を求めよ．

（名城大学）

NOTE

【27】

次の x についての方程式の解の個数を求めよ．

$$(x+4)e^{-\frac{x}{4}}=a \quad （ただし，\lim_{t\to\infty} te^{-t}=0）$$

（名古屋市立大学）

NOTE

【28】

次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $t>0$ のとき，不等式 $\log t \leqq t-1$

(2) $t>0$ のとき，不等式 $\log t \geqq 1-\dfrac{1}{t}$

(3) $x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $x\log x \geqq x\log y+x-y$

（大阪教育大学）

NOTE

【29】

次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \cos x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} \, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x \log(x+1) \, dx$

(北見工業大学)

NOTE

【 30 】

$\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$ を求めよ．

（明治大学）

NOTE

【31】

$\displaystyle\int_{-1}^{1}|e^x-1|\,dx$ を求めよ.

（工学院大学）

NOTE

【 32 】

$\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を求めよ.

（城西大学）

NOTE

【 33 】

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{x^2-(ax+b)\}^2\,dx$ を最小にする a，b の値を求めよ．また，そのときの最小値を求めよ．

（信州大学）

NOTE

【 34 】

平面上に三角形 OAB がある．OA を $3:1$ に外分する点を P，OB を $2:1$ に内分する点を Q，PQ と AB の交点を R とする．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

（東京学芸大学）

NOTE

【 35 】

平面上の三角形 ABC の 3 辺を AB $=4$，BC $=5$，CA $=6$ とする．いま，$\angle$A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，BD : DC を求めよ．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおき，三角形 ABC の内接円の中心（内心）を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

（福岡大学）

NOTE

【36】

三角形 OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{7}$ のとき，

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(2) 三角形 OAB の面積を求めよ．

（慶應義塾大学）

NOTE

【37】

三角形 OAB において，$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BO}=2$ とする．頂点 A から辺 OB へ下した垂線の足を H，点 H から辺 AB へ下した垂線の足を K とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ として，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．
(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．
(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

（信州大学）

NOTE

【 38 】

4 点 A(1, 2, 3), B(2, 1, 0), C(3, 2, 1), D(-1, 2, z) が同一平面上にあるとき, z の値を求めよ.

（立教大学）

NOTE

【39】

平行六面体 ABCD-EFGH において，CD，EH の中点をそれぞれ M，N とし，対角線 AG と平面 MNF との交点を P とする．

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

（成城大学）

NOTE

【40】

四面体 OABC において，AC の中点を P，PB の中点を Q とし，CQ の延長と AB との交点を R とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ.

(2) AR : RB および CQ : CR を求めよ.

(3) 四面体 OBQR と四面体 OCPQ の体積比を求めよ.

（大分大学）

NOTE

【41】

1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH について,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FC}}$ の値を求めよ．

(2) 辺 AB の中点を M とする．線分 MG を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，t を用いて表せ．

(3) (2) の点 P に対し，直線 MG と EP が直交するとき，t の値を求めよ．

（東京電機大学）

NOTE

【42】

O を原点とする座標空間において，点 A(0, 1, 1)，B(1, 0, 1)，P(−5, 2, 3) をとり，3 点 O，A，B を通る平面を α とする．平面 α 上の点 H の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$（$s$，$t$ は実数）と表すとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boxed{\text{ア}}\,s + \boxed{\text{イ}}\,t - \boxed{\text{ウ}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boxed{\text{エ}}\,s + \boxed{\text{オ}}\,t + \boxed{\text{カ}}$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ が平面 α と垂直であるとき，$s = \boxed{\text{キ}}$，$t = -\boxed{\text{ク}}$ となる．
したがって α 上の点のうち点 P に最も近い点の座標は，

$$\left(-\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サ}}\right)$$

であり，P とその点との距離は $\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である．また，平面 α に関して P と対称な点の座標は，

$$\left(-\boxed{\text{セ}},\ \boxed{\text{ソ}},\ -\boxed{\text{タ}}\right)$$

である．

（東京理科大学）

NOTE

【43】

xyz 空間上の 2 点 A$(-3,\ -1,\ 1)$，B$(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線 l に点 C$(2,\ 3,\ 3)$ から下した垂線の足 H の座標を求めよ.

（京都大学）

NOTE

【44】

$\triangle$ABC の内部に点 P があり，$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立っている．直線 AP と辺 BC の交点を D とする．

(1) $\overrightarrow{PD}$ を $\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ．

(2) BD：DC を求めよ．

(3) AP：PD を求めよ．

(4) $\triangle$BPD の面積が 3 のとき，$\triangle$ABP，$\triangle$BCP，$\triangle$CAP の面積を求めよ．

（筑波大学）

NOTE

【45】

$\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ とする.

(1) $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ を最小にする t の値と，そのときの最小値を求めよ.
(2) $\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になる t の値を求めよ.

（東北学院大学）

NOTE

【46】

平面上の4点O，P，Q，Rが条件

$$\mathrm{OP}=2,\ \mathrm{OQ}=3,\ \angle\mathrm{POQ}=60^\circ,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$$

を満たすとする．線分ORの長さと$\cos\angle\mathrm{POR}$の値を求めよ．

（大阪大学）

NOTE

【47】

楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上に 2 点

$$\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ \mathrm{Q}(\sqrt{3}\cos\beta,\ \sin\beta)$$

を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が直交するようにとる．ただし，O は原点であり，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ とする．

(1) $\theta=\beta-\alpha$ とおくとき，$\tan\theta$ を α の関数として表せ．

(2) α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くときの θ の最小値を求めよ．

（北海道大学）

NOTE

【48】

四面体 ABCD がある．点 P が $10\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たしているとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表せ．

(2) 直線 AP と三角形 BCD との交点を Q としたとき，次の式を満たす s，t，k を求めよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{BC}} + t\overrightarrow{\mathrm{BD}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

(3) 四面体 ABCD と四面体 PBCD の体積の比を求めよ．

（鹿児島大学）

NOTE

【49】

空間内に 2 点 P(0, 0, 2), Q$(1, \sqrt{2}, 3)$ をとる．原点を O とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ．

(3) 三角形 OPQ の面積を求めよ．

（琉球大学）

NOTE

【50】

座標空間内に3点

$$A(0,\ 1,\ 2),\ B(3,\ 3,\ 3),\ C(0,\ 5,\ 4)$$

をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 三角形ABCの重心と面積を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(3) 空間内の1点Pから三角形ABCを含む平面に下した垂線が三角形ABCの重心を通り，四面体PABCの体積が5となるとき，Pの座標を求めよ．

（愛知教育大学）

NOTE

【51】

空間内の 3 点 A(0, 1, 0), B(-1, 1, 1), C(-1, 3, 2) を通る平面を α とし，原点 O から α に下した垂線と α との交点を H とする．以下の問いに答えよ．

(1) △ABC の面積 S を求めよ．
(2) 点 H の座標を求めよ．
(3) 四面体 OABC の体積 V を求めよ．

（三重大学）

NOTE

【52】

$y = 2\sin x + \sin 2x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ のグラフをかけ.

（東海大学）

✎ NOTE

【53】

a を正の数とするとき，曲線 $y=e^{-2x}$ 上の点 $(a,\ e^{-2a})$ における接線と x 軸，y 軸とでつくられる三角形の面積を最大にする a の値と，そのときの面積を求めよ．

（大阪電気通信大学）

NOTE

【54】

点 O を (0, 0) とし，点 A を (1, 0) とする．円 $x^2+y^2=1$ の周上で $y>0$ の部分に点 P をとり，$\angle \mathrm{AOP}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ とする．また，P から x 軸へ下した垂線の足を Q とする．

(1) 三角形 APQ の面積 $S(\theta)$ を求めよ．
(2) $S(\theta)$ の最大値を求めよ．

（小樽商科大学）

NOTE

【55】

定点 $(1,\ a)$ から曲線 $y = e^x$ へ異なる 2 本の接線を引くことができるような a の値の範囲を求めよ.

（東北学院大学）

NOTE

【 56 】

$f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2(x+1)}$ とする．曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

（日本大学）

NOTE

【57】

曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

（成蹊大学）

NOTE

【58】

a を正の定数とする．直線 $l_1 : y = 6x$ が曲線 $l_2 : y = a \log x$ の接線である．

(1) a の値を求めよ．

(2) 直線 l_1 と曲線 l_2 および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

（国士舘大学）

NOTE

【 59 】

xy 平面において，曲線 $y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と曲線 $y=\cos\dfrac{x}{2}\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ との交点の x 座標は $x=\pi$ と $x=a$ である．a の値を求めよ．また，$a \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，この 2 曲線に囲まれた部分の面積を求めよ．

（愛知工業大学）

NOTE

【60】

座標平面上の曲線 C は媒介変数 t を用いて，$x = 2\cos t$，$y = t\sin t$ で表される．ただし，$0 \leqq t \leqq \pi$ とする．

(1) $\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{dy}{dx}$ を t の式で表せ．

(3) 曲線 C と y 軸の交点における曲線 C の接線の方程式を求めよ．

(4) 曲線 C のうち $x \geqq 0$ の部分と x 軸，および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

（九州産業大学）

NOTE

【61】

曲線 $y=(x-1)^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ および x 軸，y 軸で囲まれた図形を D とする．

(1) D を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

(2) D を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

（青山学院大学）

NOTE

【62】

曲線 $C : y = e^x$ の点 $(1,\ e)$ における接線を l とする．C と l と y 軸で囲まれる図形を S とする．次の問いに答えよ．

(1) S の面積を求めよ．

(2) S を x 軸の周りに回転した図形の体積を求めよ．

(3) S を y 軸の周りに回転した図形の体積を求めよ．

（筑波大学）

NOTE

【63】

円 $(x-3)^2+y^2=4$ を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．また，円 $x^2+(y-3)^2=4$ を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

（東京薬科大学）

NOTE

【64】

サイクロイド

$$x = 2(\theta - \sin\theta),\ y = 2(1 - \cos\theta)$$

の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

（奈良県立医科大学）

NOTE

【 65 】

曲線 $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}$ $(1 \leqq x \leqq 2)$ の長さを L とする．$\dfrac{72}{59}L$ の値を求めよ．

（自治医科大学）

NOTE

【 66 】

曲線 $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$ の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ.

（藤田保健衛生大学）

NOTE

【 67 】

$f(x)=(x^2-2x)e^x$ とする．曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

（兵庫県立大学）

✎ NOTE

【68】

曲線 $C : y = 1 - \log x$ について，次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 原点から曲線 C に引いた接線 l の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C，接線 l および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

（福岡大学）

NOTE

【 69 】

曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ と，2 直線 $y=2x$，$y=3x$ とが囲む領域の面積を求めよ．

（東京薬科大学）

NOTE

【70】

2 曲線 $C_1 : y=\sin 3x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$C_2 : y=\sin x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\sin 3x$ を $\sin x$ で表せ．

(2) C_1 と C_2 の共有点の x 座標をすべて求めよ．

(3) C_1 と C_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ．

（工学院大学）

NOTE

【71】

曲線 C : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

（長崎大学）

NOTE

【72】

放物線 $y=x(2-x)$ と直線 $y=x$ によって囲まれた図形を D とする．次の各問いに答えよ．

(1) D の面積を求めよ．

(2) D を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

（大阪電通大学）

NOTE

【73】

曲線 C_1：$y = \tan x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 C_2：$y = 2\sin x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．C_1，C_2 で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ．

（富山大学）

NOTE

【 74 】

曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ の $1 \leqq x \leqq 2$ の部分（端点を A，B とする）と，A，B から y 軸に下ろした垂線，および y 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ.

（福島大学）

NOTE

【 75 】

曲線 $y=\left(\dfrac{2x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ の $x=0$ から $x=\dfrac{9}{2}$ までの長さを求めよ.

（自治医科大学）

NOTE

【 76 】

xy 平面上に曲線 $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$ がある.

(1) $0 \leqq t \leqq a$ における弧の長さ $l(a)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} l(a)$ を求めよ.

（東北学院大学）

NOTE

【77】

$f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 2x + 2}$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $y = f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(4) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

（徳島大学）

NOTE

【78】

関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ を考える．曲線 $C:y=f(x)$ 上の点 $\bigl(1,\ f(1)\bigr)$ における接線を l とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の導関数と第 2 階導関数を求めよ．

(2) 直線 l の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 l，および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

（弘前大学）

NOTE

【 79 】

曲線 $y=\sqrt{x+1}e^{2x}$ と x 軸, y 軸, および直線 $x=1$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

（岩手大学）

NOTE

【80】

$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ で定義された 2 つの関数 $f(x) = 1 + 2\cos x$，$g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の共有点の x 座標をすべて求めよ．

(2) $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき，不等式 $f(x) \geqq g(x) > 0$ が成り立つことを示せ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(4) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

（静岡大学）

NOTE

【81】

曲線 $C : y = \log x$ に原点から引いた接線を l とする．また，C，l および x 軸で囲まれた図形を D とする．以下の問いに答えよ．

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 図形 D を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(3) 図形 D を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

（青山学院大学）

NOTE

【 82 】

曲線 $y = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2x}$ $(1 \leqq x \leqq 3)$ の長さを求めよ.

（東京電機大学）

NOTE

【83】

t を媒介変数として $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で表される曲線 C について，次の問いに答えよ．

(1) $t = \pi$ に対応する点における接線の傾きを求めよ．

(2) C の長さを求めよ．

（愛媛大学）

NOTE

【84】

関数 $f(x)=e^{2x}-3e^x+2$ を考える．曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分を D とする．下の問いに答えよ．

(1) x の方程式 $f(x)=0$ を解け．
(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．
(3) $y=f(x)$ の概形を描け．
(4) D の面積 S を求めよ．

（長岡技術科学大学）

NOTE

【 85 】

$-\dfrac{3}{4}\pi \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ の範囲において，2 つの曲線 $y = \sin x$，$y = \cos x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

（甲南大学）

NOTE

【86】

曲線 C：$\sqrt{\dfrac{x}{6}}+\sqrt{\dfrac{y}{4}}=1$（$x$，$y$ は実数，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$）について考える．曲線 C と x 軸と y 軸で囲まれた図形の面積を S とする．S の値を求めよ．

（自治医科大学）

NOTE

【 87 】

曲線 $C : y=(\log x)^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 導関数 y' を求めよ．

(2) 曲線 C 上の 点 $\left(\dfrac{1}{e},\ 1\right)$ における接線 l の方程式を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(3) 曲線 C，接線 l および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

（神奈川大学）

NOTE

【88】

曲線 $C : y = e^{2x} + x$ と原点を通り C と接する直線 l について次の各問いに答えよ．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．

(2) y 軸，曲線 C，直線 l で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) y 軸，曲線 C，直線 l で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

（中京大学）

NOTE

【89】

直線 $I : y = -x + 4$ と曲線 $C : y = \dfrac{3}{x}$ $(x > 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 直線 l と曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(2) 直線 l と曲線 C で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

（福岡大学）

NOTE

【 90 】

放物線 $y = x^2 - 2x$ を C，直線 $y = x$ を l とする．C と l の交点のうち，x 座標が正となるものを P とする．C と l が囲む部分を A とし，A を x 軸の周りに 1 回転して得られる回転体の体積を V とする．

(1) P の座標を求めよ．

(2) V を求めよ．

（東京理科大学）

NOTE

【 91 】

z，w を複素数とする．$|z|=1$ または $|w|=1$ のとき，$\left|z\overline{w}+1\right|=|z+w|$ が成り立つことを示せ．ただし，$\overline{w}$ は w の共役な複素数を表す．

（福岡教育大学）

NOTE

【 92 】

$\alpha = \dfrac{\pi}{15}$，$\beta = \dfrac{\pi}{10}$，$\gamma = \dfrac{\pi}{5}$ のとき，$\dfrac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)^3}{\cos\gamma + i\sin\gamma}$ の値を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

（関西大学）

NOTE

【93】

$i^2 = -1$ とするとき，$\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{-1+i}\right)^9$ を求めよ．

（成蹊大学）

NOTE

【 94 】

i を虚数単位とし，a を実数とする．$2i$ が方程式 $z^6 = a$ の解であるとき，a の値と $2i$ 以外の解をすべて求めよ．

（愛媛大学）

NOTE

【 95 】

複素平面上の点 $1+i$ を点 $1-i$ のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点を求めよ．

（北見工業大学）

NOTE

【 96 】

複素平面上の 3 点 O(0)， A$(2+\sqrt{3}i)$， B が，$\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{6}$ かつ OA = 2OB を満たしているとき，点 B を表す複素数を求めよ．

（関西大学）

NOTE

【97】

α を正の実数，β を複素数とする．複素平面上の 3 点 0，α，β を頂点とする三角形の面積が 1 で，α と β が $5\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2 = 0$ を満たすとき，α と β の値を求めよ．

（三重大学）

NOTE

【 98 】

複素平面上の 3 点 $A(z_1)$，$B(z_2)$，$C(z_3)$ は，

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = (3+4i)t \ (t \text{ は正の実数}),\ |z_2 - z_1| = 1$$

を満たすとする．ただし，i は虚数単位である．

(1) $\cos\angle BAC$ を求めよ．

(2) 線分 BC の長さが最小となるとき，t の値を求めよ．

（芝浦工業大学）

NOTE

【 99 】

i を虚数単位とする．複素平面上の点 z について，次の空所を埋めよ．

(1) $|2z+3i|-|2z-2|=0$ を満たす点 z の全体は，点 $z_1=1$ と点 $z_2=$ $\boxed{\text{ア}}$ を結ぶ線分の垂直二等分線を表す．

(2) $4(z-2+i)(\overline{z}-2-i)=1$ を満たす点 z の全体は，点 $z_3=$ $\boxed{\text{イ}}$ を中心とする半径 $\boxed{\text{ウ}}$ の円を表す．ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数である．

（大阪工業大学）

NOTE

【 100 】

i は虚数単位である． 複素平面上で，方程式 $|z+3i| = 2|z|$ を満たす図形と方程式 $|z-4i| = |z|$ を満たす図形の共有点を表す複素数をすべて求めよ．

（札幌医科大学）

NOTE

【 101 】

0 でない複素数 z に対して，$w=z+\dfrac{4}{z}$ とする．また，i は虚数単位とする．このとき，

(1) z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とし，w の実部を x，虚部を y とする．このとき，x と y を r と θ を用いてそれぞれ表せ．

(2) 複素平面上で点 P(z) が $|z|=1$ を満たしながら動くとき，点 Q(w) が描く図形を求め，複素平面上に図示せよ．

(3) w が実数となるための z の条件を求め，その条件を満たす点 P(z) の全体が表す図形を複素平面上に図示せよ．

(4) 点 P(z) が (3) の図形上を動くとする．点 R(α) が $|\alpha-(4+6i)|=1$ を満たしながら動くとき，線分 PR の長さの最小値を求めよ．

（静岡大学）

NOTE

【 102 】

z を 0 でない複素数とする．複素平面において P(z)，Q(w) は $w=\dfrac{1}{z}$ を満たしている．このとき，

(1) x，y，u，v を実数として，$z=x+yi$，$w=u+vi$ と表すとき，x と y を u，v を用いて表せ.

(2) A(1)，B(i) として，P が線分 AB 上を動くとき，Q の描く図形を図示せよ．

（東京女子大学）

NOTE

【 103 】

複素数 z の方程式 $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$ の解をすべて求めよ.

（山梨大学）

NOTE

【 104 】

O を原点とする複素平面上で，2 つの複素数 $z_1 = 1 + 2i$，$z_2 = -1 + 3i$ の表す点をそれぞれ P，Q とする．

(1) 偏角 $\arg \dfrac{z_2}{z_1}$ を求めよ．ただし，偏角の範囲は 0 以上 2π 未満とする．

(2) 直線 OQ に関して，点 P と対称な点 R を表す複素数を求めよ．

（関西大学）

NOTE

【 105 】

複素平面において，方程式 $|z-i| = 2|z+i|$ を満たす点 z 全体はどのような図形か調べよ．

（広島市立大学）

NOTE

【 106 】

複素数 z が $|z-2i|=2$ を満たすとき，$\left|z-2\sqrt{3}\right|$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの z の値を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

（山形大学）

NOTE

【 107 】

複素数 z が $|z|=1$（ただし，$|z| \neq -1$）を満たしながら動くとき，$w=\dfrac{1}{z+1}$ で表される点 w は，複素平面上でどのような図形を描くか示せ．

（中部大学）

NOTE

【108】

複素平面上で $|z-3i| \leqq 1$ を満たす複素数 z について $|z-i+1|$ の最大値を求めよ.

（徳島文理大学）

NOTE

【 109 】

複素数 z が $|z-(2+i)|=1$ を満たすとき，複素数 $w=1-iz$ を表す点 Q は，複素平面上でどのような図形上にあるか.

（北海道東海大学）

NOTE

【 110 】

複素数 α に対して，そのその共役複素数を $\overline{\alpha}$ で表す．α を実数ではない複素数とする．複素平面内の円 C が 1，-1，α を通るならば，C は $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ も通ることを示せ．

（京都大学）

NOTE

【111】

複素数 α, β が，$|\alpha| = 2$，$|\beta| = 3$，$|-\alpha + 2\beta| = 5$ を満たすとき，$|3\alpha + 4\beta|$ の値を求めよ．

（京都産業大学）

NOTE

【 112 】

虚部が 0 でない複素数 z について，$z+\dfrac{2}{z}$ が実数であるとき，$|z|$ を求めよ．

（龍谷大学）

NOTE

【113】

i を虚数単位とし，相異なる 3 つの複素数 α，β，γ の間に等式 $-2i\alpha+(1+2i)\beta-\gamma=0$ が成り立つとする．

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) $|\beta-\alpha|=2$ が成り立つとし，複素平面上の 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする三角形 ABC の外接円の半径を求めよ．

（福岡大学）

NOTE

【 114 】

i を虚数単位とし，$\alpha = -2 + 2i$，$\beta = 3 + i$ とする．z は等式 $2|z - \alpha| = |z - \beta|$ を満たす複素数全体を動くとする．このとき，複素平面上の点 P(z) が描く図形は円である．

(1) 点 P(z) が描く円の中心を表す複素数を求めよ．

(2) $|z|$ の最大値を求めよ．

（北里大学）

NOTE

【 115 】

複素平面において，点 z が $|z| = 2$ ($z \neq 2$) で表される図形上を動くとき，複素数 $w = \dfrac{z+2}{z-2}$ で表される点 w は，どのような図形を描くか.

（山梨大学）

NOTE

$\Im\int\hbar\,i^2$

(T24−M3CE)