2024年度　冬季講座B

数学II+B 基本演習

共立女子高等学校

問題別出題分野

1	式と証明
2	式と証明
3	式と証明
4	複素数と方程式
5	複素数と方程式
6	複素数と方程式
7	図形と方程式
8	図形と方程式
9	図形と方程式
１０	数列
１１	数列
１２	数列

1. $(1+x)^4$ の展開式における x^2 の係数は $\boxed{\text{ア}}$ である.

また, n を 2 以上の自然数とするとき, $(1+2x)^n$ の展開式における x^2 の係数が 60 となるのは,

$n=\boxed{\text{イ}}$ のときである.

2. m，n を整数とする．x の多項式 $A=x^3+mx^2+nx+2m+n+1$ を考える．x の多項式 B を $B=x^2-2x-1$ とする．

A を B で割ると，商 Q と余り R はそれぞれ

$$Q=x+\left(m+\boxed{\text{ア}}\right),\quad R=\left(2m+n+\boxed{\text{イ}}\right)x+\left(3m+n+\boxed{\text{ウ}}\right)$$

である．

また，$x=1+\sqrt{2}$ のとき，B の値は $\boxed{\text{エ}}$ であり，さらにこのとき，A の値が -1 であるならば，m，n は整数だから，$m=\boxed{\text{オ}}$，$n=\boxed{\text{カキ}}$ である．

3. 14.4 トンの液体 P を x トンずつ均等に分けて，工場 Q まで輸送する．運送には，1 回の運送のたびに輸送量 x に無関係に 2 万円ずつかかる輸送費と，1 回の輸送量 x に比例して決まる維持費（P の品質を維持したり，安全に運送するための保険料など）がかかる．液体 P をすべて運送し終えるまでにかかる輸送費の A 万円と維持費の B 万円を合わせた総費用 C 万円を最小にしたい．

(1) 輸送の回数は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}\,x}$ 回であるから，$A=\dfrac{\boxed{エオカ}}{\boxed{キ}\,x}$ となる．

(2) $B=20x$ のとき，$AB=\boxed{クケコ}$ である．相加平均と相乗平均の大小関係を利用すると，C は $x=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ で最小値 $\boxed{スセ}$ をとることがわかる．

4. a，b を整数として，複素数 $z=a+bi$ を考える。$z^2=5-12i$ が成り立つとき，

$$a^2-b^2=\boxed{\text{ア}}\ \cdots①,\qquad ab=\boxed{\text{イウ}}\ \cdots②$$

である．

② を満たす整数 a，b の組 $(a,\ b)$ は $\boxed{\text{エ}}$ 組ある．

このうち，① を満たすものは

$$a=\boxed{\text{オ}},\ b=\boxed{\text{カキ}}\quad \text{または}\quad a=\boxed{\text{クケ}},\ b=\boxed{\text{コ}}$$

である．

5. 虚数 $\alpha=-1+\sqrt{5}i$ に対して，α，および α と共役な複素数 $\beta=-1-\sqrt{5}i$ を解とする 2 次方程式の 1 つは $x^2+\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}=0$ である．

これを利用して，α^4 を $p\alpha+q$（p，q は整数）の形に表したい．

考え方 1

$x^4=\left(x^2+\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}\right)\left(x^2-\boxed{\text{ウ}}x-\boxed{\text{エ}}\right)+\boxed{\text{オカ}}x+\boxed{\text{キク}}$ であるから，

$\alpha^4=\boxed{\text{オカ}}\alpha+\boxed{\text{キク}}$ である．

考え方 2

$\alpha^2=-\boxed{\text{ア}}\alpha-\boxed{\text{イ}}$ から，

$\alpha^3=\alpha^2\cdot\alpha=-\boxed{\text{ア}}\alpha^2-\boxed{\text{イ}}\alpha=\boxed{\text{ケコ}}\alpha+\boxed{\text{サシ}}$，

$\alpha^4=\alpha^3\cdot\alpha=\boxed{\text{ケコ}}\alpha^2+\boxed{\text{サシ}}\alpha=\boxed{\text{オカ}}\alpha+\boxed{\text{キク}}$ である．

β についても同様にして，β^4 を $p\beta+q$（p，q は整数）の形に表すと，$\alpha^4+\beta^4=\boxed{\text{スセ}}$ であることが分かる．

6. k を実数とし，x の多項式を $P(x)=x^4+(k-1)x^2+(6-2k)x+3k$ とする．

(1) $k=0$ とする。このとき $P(x)=x\left(x^3-x+\boxed{\text{ア}}\right)$ である。また，$P(-2)=\boxed{\text{イ}}$ である．これらのことにより，$P(x)$ は $P(x)=x\left(x+\boxed{\text{ウ}}\right)(x^2-2x+3)$ と因数分解できる．また，方程式 $P(x)=0$ の虚数解は $\boxed{\text{エ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\,i$ である．

(2) $k=3$ とすると，$P(x)$ を x^2-2x+3 で割ることにより，

$$P(x)=\left(x^2+\boxed{\text{カ}}x+\boxed{\text{キ}}\right)(x^2-2x+3)$$

が成り立つことが分かる．

(3) (1)，(2) の結果を踏まえると，k がどのような実数であっても，$P(x)$ は x^2-2x+3 で割り切れることが予想される．この予想が正しいとすると，ある実数 m，n に対して

$$P(x)=(x^2+mx+n)(x^2-2x+3)$$

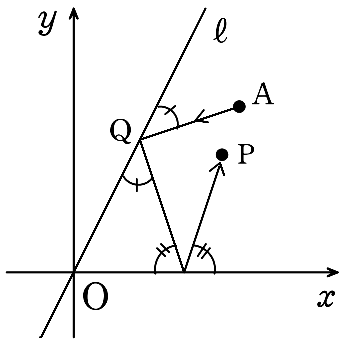
が成り立つ．この式の x^3 の係数に着目することにより，$m=\boxed{\text{ク}}$ が得られる．また，定数項に着目することにより，$n=k$ が得られる．このとき，実際に

$$\left(x^2+\boxed{\text{ク}}x+k\right)(x^2-2x+3)=x^4+(k-1)x^2+(6-2k)x+3k$$

が成り立つことが計算により確かめられ，この予想が正しいことが分かる．

(4) 方程式 $P(x)=0$ が実数解をもたないような k の値の範囲は $k>\boxed{\text{ケ}}$ である．

7. 座標平面上の直線 $y=3x$ を ℓ とする．点 A$(5,\ 5)$ から出発して直進する点 P が，点 Q において ℓ で反射し，次に x 軸で反射して，再び A に戻るようにしたい．図のように，入射方向と反射方向について，反射の際の直線とのなす角は等しいものとするとき，点 Q をどこにとればよいか．その座標を求めよう．



ℓ に関して点 A と対称な点を B，x 軸に関して点 A と対称な点を C とすると，B$\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$，C$\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オカ}}\right)$ である．3 点 B，Q，C が一直線上にあるとき，点 A を出発した点 P は再び A に戻ってくる．

直線 BC の方程式は $y=\boxed{\text{キク}}x+\boxed{\text{ケ}}$ であるから，Q$\left(\boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サ}}\right)$ である．

8. O を原点とする座標平面において，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を中心とする円 C が，方程式 $y=\dfrac{4}{3}x$ で表される直線 ℓ に接している．このとき，円 C の半径 r は，P と ℓ の距離に等しいので，

$r=\dfrac{1}{5}\left|\boxed{\text{ア}}\,p-\boxed{\text{イ}}\,q\right|$ …① である．

円 C が，x 軸に接し，点 $\mathrm{R}(2,\ 2)$ を通る場合を考える．このとき，$p>0$，$q>0$ である．C の方程式を求めよう．

C は x 軸に接するので，C の半径 r は q に等しい．したがって，① により，$p=\boxed{\text{ウ}}\,q$ である．C は点 R を通るので，求める C の方程式は，

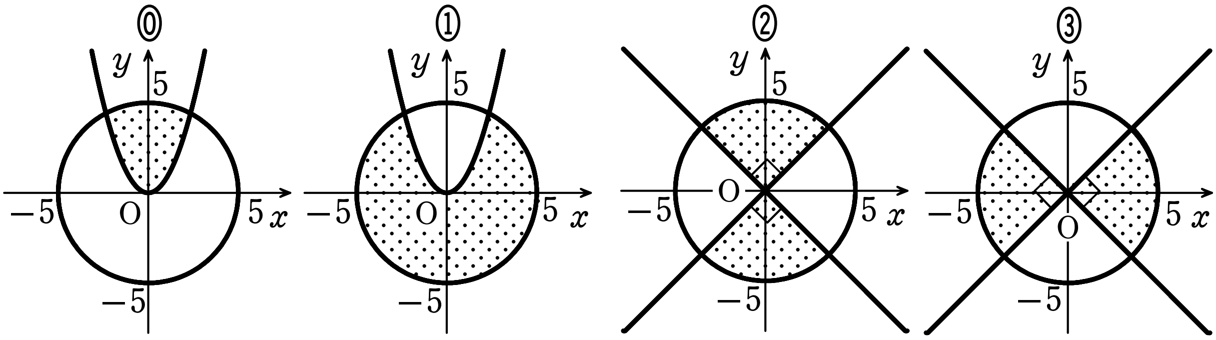
$$\left(x-\boxed{\text{エ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{オ}}\right)^2=\boxed{\text{カ}}$$

または

$$\left(x-\boxed{\text{キ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ク}}\right)^2=\boxed{\text{ケ}}$$

であることが分かる．ただし，$\boxed{\text{カ}}<\boxed{\text{ケ}}$ とする．

9. (1)　連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 25 \\ x^2-y^2 \leqq 0 \end{cases}$ の表す領域を D とする．D を図示すると，次の図 $\boxed{\boxed{\text{ア}}}$ の影をつけた部分である．ただし，境界線(境界)を含む．$\boxed{\boxed{\text{ア}}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから1つ選べ．



(2)　座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．D に含まれる格子点の個数は $\boxed{\text{イウ}}$ 個である．

(3)　m，n は整数であり，2つの不等式 $m^2+n^2 \leqq 25$，$m^2-n^2 \leqq 0$ を満たすとする．このとき，$3m+2n$ の最大値は $\boxed{\text{エオ}}$ である．

10. 1辺の長さが6の正三角形に内接する円を C_1 とする．円 C_1 に内接する正三角形を考え，その正三角形に内接する円を C_2 とする．さらに，円 C_2 に内接する正三角形を考え，その正三角形に内接する円を C_3 とする．この操作を繰り返し，円 C_4，C_5，……，C_n を定める．また，円 C_n の半径を r_n とし，円 C_n の面積を S_n と表す．このとき，数列 $\{r_n\}$ は，初項 $\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$，公比 $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ の等比数列であり，数列 $\{S_n\}$ は初項 $\boxed{\text{エ}}\,\pi$，公比 $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ の等比数列である．よって，数列 $\{S_n\}$ の初項から第 n 項までの和は，$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n=\boxed{\text{キ}}\,\pi\left\{\boxed{\text{ク}}-\left(\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)^n\right\}$ となる．

11. 自然数の列 1，2，3，4，… を，次のように群に分ける．

$$1 \mid 2,\ 3,\ 4,\ 5 \mid 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12 \mid \cdots$$

第 1 群　第 2 群　第 3 群

ここで，一般に第 n 群は $(3n-2)$ 個の項からなるものとする．

(1) 第 n 群の最後の項を a_n で表すと，$a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=12$，$a_4=\boxed{\text{アイ}}$ である．

$a_n-a_{n-1}=\boxed{\text{ウ}}n-\boxed{\text{エ}}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ が成り立ち，

$$a_n=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}n^{\boxed{\text{キ}}}-\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

よって，600 は第 $\boxed{\text{コサ}}$ 群の小さい方から $\boxed{\text{シス}}$ 番目の項である．

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対し，第 $(n+1)$ 群の小さい方から $2n$ 番目の項を b_n で表すと，

$$b_n=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}n^{\boxed{\text{タ}}}+\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}n$$ であり，$$\frac{1}{b_n}=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\boxed{\text{ナ}}}\right)$$ が成り立つ．

これより，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{\boxed{\text{ニ}}n}{\boxed{\text{ヌ}}n+\boxed{\text{ネ}}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ となる．

12. 〔Ⅰ〕 数列$\{a_n\}$を次のように定める．

$$a_1=2,\ a_2=3,\ a_{n+2}-a_n=4 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，$a_3=\boxed{\text{ア}}$，$a_4=\boxed{\text{イ}}$，$a_5=\boxed{\text{ウエ}}$，$a_6=\boxed{\text{オカ}}$であり，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して，

$$a_{2n-1}=\boxed{\text{キ}}n-\boxed{\text{ク}},\quad a_{2n}=\boxed{\text{ケ}}n-\boxed{\text{コ}}$$

である．また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}a_k=n\left(\boxed{\text{サ}}n+\boxed{\text{シ}}\right)$である．

〔Ⅱ〕 2つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$について，$a_1=3$，$b_1=1$であり，また，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$のとき，

$$a_{n+1}=a_n+2b_n,\ b_{n+1}=2a_n+b_n$$

が成り立っている．

このとき，$a_{n+1}+b_{n+1}=\boxed{\text{ア}}(a_n+b_n)$より，$a_n+b_n=\boxed{\text{イ}}\cdot\boxed{\text{ウ}}^{n-1}$である．

同様にして，$a_n-b_n=\boxed{\text{エ}}\cdot\left(\boxed{\text{オカ}}\right)^{n-1}$である．

したがって，$a_n=\boxed{\text{キ}}\cdot\boxed{\text{ク}}^{n-1}+\left(\boxed{\text{ケコ}}\right)^{n-1}$，$b_n=\boxed{\text{キ}}\cdot\boxed{\text{ク}}^{n-1}-\left(\boxed{\text{ケコ}}\right)^{n-1}$である．