

2020 年度

数学 大学入試問題演習

東京都立青山高等学校

はじめに

高等学校の数学の内容もすでに学び終え、問題演習を重ねることで習熟の度合いもかなり高まってきていることと思う。この時期からは自分の志望する大学や同難易度の大学の入試問題を通して実践的な演習を行うと同時に、受験する大学については過去問研究に入っていくことになる。

授業の中でも 2020 年度の大学入試問題を使って演習を行っていく。ただ、志望大学は人によって異なるので、全員の志望大学のすべての問題を演習するということは不可能である。そこで、高等学校の数学の全範囲から解いておくべき問題を、難関国立大学を中心に選択した。もちろん、解いておくべきと考えた問題は難関国立大学かどうかに関わらず選択をしている。また、選択をしていない問題の中にも解いておくべき問題は多数ある。やむを得ず選択をしていないので、自分の志望大学については各自で過去問演習をしてもらいたい。

授業では 20 分間で問題を解いてもらう。その 20 分間のうち、最初の 10 分間は各自で考え、残りの 10 分間は周囲の人と一緒に考えてもらいたい。限られた時間の中で、しかも一緒に考えている時間で、他の人がどのような考え方をしたかを知ることによって、自分の着想や思考の流れに幅を持たせることができる。1 人で問題を解いているのではなく、教室でみんなの問題を解いていることの利点を積極的に活用しよう。

なお、20 分間というのは多くの大学入試問題の平均解答時間から設定したものであり、すべての問題が 20 分間で解けたり、20 分の時間がかかったりということを意味しない。中には、解答するのに 30 分間くらいかかったり、15 分間くらいで解けたりする問題もある。この点は注意しておきたい。

問題を解いたあと、残りの 30 分で解説をする。なので、予習をする必要はない。その代わりに、必ず復習をしてもらいたい。解説を聞いただけでは分かったつもりや理解が不十分なまま終わってしまう。さらに、時間をおいてかもう一度解くこともしよう。それにより、理解がより深まり、強固なものになっていく。

大学入試まで 3 ヶ月しかないのではない。3 ヶ月もあるのである。この気の持ちようは些細なことに思えるかもしれないが、現役生は忘れてはいけないことだ。青高生であれば、外苑祭で本番に近づくと完成度が上がるという経験はしているはずである。本番当日まであと僅かだからと言ってあきらめることはしなかったはずだ。大学入試の勉強だって同じである。粘って粘って、粘りつくそう！

次の各問いに答えよ.

- (1) a を実数とする. 方程式 $x^2 - 2ax - |x| + a^2 = 0$ が, $-1 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ.
- (2) 実数 x, y が $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ の範囲を動くとする. $X = 3x + 2y, Y = 2x + 3y$ とするとき, 点 (X, Y) の動く領域を XY 平面上に図示せよ.

(山梨大学)

[2]

n を 2 上の自然数とする. 1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い, 出た目を順に X_1, X_2, \dots, X_n とする.

- (1) X_1, X_2, \dots, X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ.
- (2) X_1, X_2, \dots, X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ.
- (3) X_1, X_2, \dots, X_n の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ.

(北海道大学)

 NOTE

[3]

n を 2 以上の自然数とする. 三角形 ABC において, 辺 AB の長さを c , 辺 CA の長さを b で表す. $\angle ACB = n \angle ABC$ であるとき, $c < nb$ を示せ.

(大阪大学)

 NOTE

[4]

次の各問いに答えよ.

(1) $|x^2 - x - 23|$ の値が, 3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ.

(2) k 個の連続した正の整数 x_1, \dots, x_k に対して,

$$|x_j^2 - x_j - 23| (1 \leq j \leq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と, その k に対する連続した正の整数 x_1, \dots, x_k をすべて求めよ. ここで k 個の連続した整数とは,

$$x_1, x_1 + 1, x_1 + 2, \dots, x_1 + k - 1$$

となる列のことである.

(東京工業大学)

[5]

xy 平面上の 3 直線 l , m , n を考える.

$$l : x - 4y = 0, \quad m : 4x + 3y - 19 = 0, \quad n : 6x - 5y = 0$$

直線 l と m の交点を A , 直線 m と n の交点を B , 直線 n と l の交点を C とする. 点 P が線分 BC 上を, 端点 B と C を除いて動くものとする. P から m に下ろした垂線の長さを d_1 , P から l に下ろした垂線の長さを d_2 とする.

- (1) A , B , C の座標を求めよ.
- (2) d_1 の値がとり得る範囲を求めよ. また, d_2 の値がとり得る範囲を求めよ.
- (3) 積 $d_1 d_2$ の最大値を求めよ.

(東北大学)

 NOTE

[6]

xy 平面において x, y がともに整数となる点 (x, y) を格子点という. 正の整数 n に対して

$$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq n$$

で定まる領域を D とする. 4つの頂点がすべて D に含まれる格子点であり, x 軸と平行な辺をもつ長方形の数を $R(n)$ とする. また, そのなかで特に1つの辺が x 軸上にある長方形の数を $S(n)$ とする. 以下の各問いに答えよ.

- (1) $R(3)$ と $R(4)$ を求めよ.
- (2) $S(n)$ を求めよ.
- (3) $R(n)$ を求めよ.
- (4) $R(n) = 1001$ となる n を求めよ.

(名古屋大学)

【7】

座標空間内の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, p)$, $C(q, r, s)$ を頂点とする四面体が正四面体であるとする。ただし, $p > 0$, $s > 0$ とする。以下の各問いに答えよ。

(1) p, q, r, s の値を求めよ。

(2) z 軸に垂直な平面で正四面体 $OABC$ を切ったときの断面積の最大値を求めよ。

(九州大学)

 NOTE

【8】

$a > 0, b > 0$ とする. 座標平面上の曲線

$$C: y = x^3 - 3ax^2 + b$$

が, 以下の2条件を満たすとする.

条件1 C は x 軸に接する.

条件2 x 軸と C で囲まれた領域 (境界は含まない) に, x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど1個ある.

b を a で表し, a のとりうる値の範囲を求めよ.

(東京大学)

 NOTE

【9】

a を負の実数とする. xy 平面上で曲線 $C: y = |x|x - 3x + 1$ と直線 $l: y = x + a$ のグラフが接するときの a の値を求めよ. このとき, C と l で囲まれた部分の面積を求めよ.

(京都大学)

 NOTE

[10]

A と B の 2 人が, A を先手として以下のルールで交互に石を取り合うゲームを行う.

【ルール】

- はじめに n 個の石がある.
- まず先手は $(n - 1)$ 個以下の好きな数の石を取る.
- 以降は, 直前に相手が取った石の数の 2 倍以下の好きな数の石を取ることを繰り返す.
- 最後の石を取ったほうが勝ちとなる.

相手の石の取り方によらず勝てるような石の取り方があるとき「必勝法がある」という.

例えば, $n = 4$ のとき, まず A が 1 個取れば, 次に B は 1 個か 2 個取ることができる. もし, B が 1 個取ったなら, A は次に 2 個取ることで勝てる. もし B が 2 個取ったなら, A は次に 1 個取ることで勝てる.

このように, B の石の取り方によらず A は勝てるので, A に必勝法がある.

(1) $n = 5$ のとき, A または B のどちらに必勝法があるか答えよ.

(2) $n = 10$ のとき, A または B のどちらに必勝法があるか答えよ.

(一橋大学)

[11]

a を定数とし, $0 \leq \theta < \pi$ とする. 方程式 $\tan 2\theta + a \tan \theta = 0$ を満たす θ の個数を求めよ.

(一橋大学)

 NOTE

[12]

三角形 OAB において, $OA = OB = 3$, $AB = 4$ とする. 辺 AB の 3 等分線のうち, 点 B に近い方の点を C とし, 辺 AB の中点を M とする. 点 M を通り, 直線 OA に垂直な直線を l , 点 C を通り, 直線 OA に平行な直線を m とする. また, 直線 l と直線 m の交点を P とし, 直線 OP と直線 AB の交点を Q とする. このとき, 線分 QB の長さを求めよ.

(早稲田大学)

 NOTE

【答】

1. (1) $-2 < a < 6$ (2) 略

2. (1) $\frac{2^n - 1}{6^n}$ (2) $\frac{6^n - 3^n - 2^n}{6^n}$ (3) $\frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n}$

3. 略

4. (1) 1, 3, 4 (2) 最大値 : 5, 連続した正の整数 : 3, 4, 5, 6, 7

5. (1) A(4, 1), $(\frac{5}{2}, 3)$, C(0, 0)

(2) $0 < d_1 < \frac{19}{5}$, $0 < d_2 < \frac{19}{2\sqrt{17}}$

(3) $\frac{361}{40\sqrt{17}}$

6. (1) $R(3) = 5$, $R(4) = 15$

(2) $S(n) = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$

(3) $R(n) = \frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2)$

(4) $n = 12$

7. (1) $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$, $s = 1$ (2) $\frac{1}{2}$

8. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} < a \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

9. $\frac{32\sqrt{2}}{3} + 16$

10. (1) B に必勝法がある. (2) A に必勝法がある.

11. $a < -2$, $0 < a$ のとき 3 個, $-2 \leq a \leq 0$ のとき 1 個

12. $\frac{52}{31}$

