2020 年度　夏期講習

大学入学共通テスト演習

― 数学 II + B 編 ―

東京都立青山高等学校

はじめに

2年生までに，数学II，数学Bの学習を終え，1学期には全分野に渡っての総復習をしてきたことだろう．問題演習を重ねることで習熟の度合いもかなり高まってきていることと思う．ただ，苦手とする分野は残っているのではないだろうか．それを気に病む必要はない．多くの受験生，特に文系といわれる学部に進学を考えている者は，誰しもがそのような分野があるものだ．大切なのはいかにその苦手分野を克服していくかである．2学期の10月頃からの実践演習の時期までに，苦手だという意識をなくしていけばよい．そのためにも，この夏季休業の時期に苦手分野の演習に重点を置きつつ，1学期に取り組んできた演習問題の反復学習に取り組んでもらいたい．

本講習では大学入学共通テストにおいて，その目玉ともいわれている問題，俗に新傾向の問題といわれている問題を扱っていく．共通テストというと，この傾向の問題のことばかりが話題に上がる．さらに，それが今までの大学入試センター試験と大きく異なり，センター試験対策のような勉強では厳しいのでは？　という空気もつくり出している．しかし，そのようなことはない．センター試験で充分な点数が取れる力を培う勉強をしていれば，共通テストにも充分に対応できる．センター試験の出題形式ならではの裏技的な解法に頼るような勉強では厳しいかもしれない．だが，みんなのように，堅実に学習を積み重ねてきた者であれば，心配をする必要はない．そこで，本講座での演習を通じて，新傾向の問題でも，これまでの学習で取り組めることを実感してもらいたい．そのような意図で本テキストはつくられている．

本テキストの各問題には，目標解答時間を設定してある．その時間で問題を解くことだけはしてから講習に臨んでもらいたい．時間内に解けなかった部分を，参考書などを調べて解いておこう，などとは考えなくてよい．何ができなかったのかを自分で認識しておけば充分である．その代わり，復習は必ずしてもらいたい．解けた解けない関わらず，この夏季休業中に間隔を空けて，2回は解き直しをしよう．くり返しの学習は，力の定着には欠かせない．

問題を解いてみて，「やはり，新傾向の問題は…」と心配になる人がいるかもしれない．大丈夫，心配することはない．それは「慣れ」の問題である．確かに新傾向の問題には「慣れていない」だろう．でも，それは当たり前だ．慣れていたら，新傾向とはいえなくなってしまう．慣れていないのは，どの受験生でも同じである．しかも，今は予備校や出版社からの共通テスト対策の予想問題集が揃い始めた，という状況だ．慣れるための材料がようやく出てきたのだから，どの受験生もこれから慣れていく練習をしていくしかない．だから，「慣れ」の問題は気にしなくともよい．それよりも，従来のセンター試験の問題に充分対応できる力を定着させていくことに，今は気を配ろう．

秋からの実践演習まで約2ヶ月しかないのではない．2ヶ月もあるのである．この気の持ちようは些細なことに思えるかもしれないが，現役生は忘れてはいけないことだ．青高生であれば，外苑祭で本番に近づくにつれ完成度が上がるという経験はしているはずである．本番当日まであと僅かだからと言ってあきらめることはしなかったはずだ．大学入試の勉強だって同じである．粘って粘って，粘りつくそう！

1.【目標解答時間：15 分】

先生と太郎さんと花子さんは，次の**【問題】**について話している．3 人の会話を読んで，下の問いに答えよ．

> **【問題】** 3 次方程式 $2x^3-ax^2+bx-39=0$ … ① の 1 つの解が $2+3i$ であるとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ．

太郎：方程式の解が 1 つわかっているから，その解を方程式に代入すれば a，b の関係式が得られます．

花子：$x=2+3i$ を ① に代入すると，$2(2+3i)^3-a(2+3i)^2+b(2+3i)-39=0$ が成りつので，整理して，a，b の値を求めると，$a=\boxed{アイ}$，$b=\boxed{ウエ}$ となります．

先生：正解です．他の解き方で，a，b の値を求めることはできませんか．

太郎：① の 1 つの解が $2+3i$ なので，これと共役な複素数 $\boxed{オ}$ も ① の解です．$2+3i$ と $\boxed{オ}$ を解にもつ 2 次方程式の 1 つは，$x^2-\boxed{カ}x+\boxed{キク}=0$ です，このことを利用して解くことができるんじゃないでしょうか．

花子：① は $x^2-\boxed{カ}x+\boxed{キク}$ で割り切れる，ということを利用すればいいんですね．① を $x^2-\boxed{カ}x+\boxed{キク}$ で割ったときの余りを求めて

$$\left(-\boxed{ケ}a+b+\boxed{コ}\right)x+\boxed{サシ}a-\boxed{スセソ}=0$$

これが x の恒等式だから，$a=\boxed{アイ}$，$b=\boxed{ウエ}$ と求められます．

先生：そうですね．そのような解き方もありますね．a，b の値は求められたので，他の解を求めてみましょう．

太郎：① を $x^2-\boxed{カ}x+\boxed{キク}$ で割ったときの商が $\boxed{タ}x-a+\boxed{チ}$ ですから，① の $2+3i$ 以外の解は，$\boxed{オ}$ と $\boxed{ツ}$ となります．

先生：正解です．これで a，b の値と他の解を求めることができましたね．

(1) $\boxed{アイ}$，$\boxed{ウエ}$ に当てはまる数を答えよ．

(2) $\boxed{オ}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから 1 つ選べ．

⓪ $-2+3i$　　① $2-3i$　　② $-2-3i$　　③ $3+2i$

(3) $\boxed{カ}$ ～ $\boxed{チ}$ に当てはまる数を答えよ．また，$\boxed{ツ}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから 1 つ選べ．

⓪ 0　　① 1　　② 2　　③ $\dfrac{3}{2}$　　④ $\dfrac{5}{2}$　　⑤ $\dfrac{7}{2}$

2.【目標解答時間：15 分】

m を定数とする．直線 $x+my=2m+3$ は m の値に関わらず点 $\left(3,\ \boxed{\text{ア}}\right)$ を通る．

また，この直線の x 切片は $\boxed{\text{イ}}\,m+\boxed{\text{ウ}}$ である．

次に，$m>0$ として，x，y が 4 つの不等式

$$x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+3y\leqq 9,\ x+my\leqq 2m+3$$

を同時に満たすときの $x+y$ の最大値を M とする．

(1) $m=\dfrac{1}{4}$ のとき，$M=\boxed{\text{エ}}$ である．$x+y=\boxed{\text{エ}}$ となるときの x，y の値は，

$x=\boxed{\text{オ}}$，$y=\boxed{\text{カ}}$ である．

(2) m の値の範囲が $0<m\leqq\boxed{\text{キ}}$ のとき，m の値に関わらず $M=\boxed{\text{エ}}$ である．

m の値の範囲が $3<m$ のとき，m の値に関わらず $M=\boxed{\text{ク}}$ となる．また，

$x+y=\boxed{\text{ク}}$ となるときの x，y の値は，$x=\boxed{\text{ケ}}$，$y=\boxed{\text{コ}}$ である．

m の値の範囲が $\boxed{\text{キ}}<m\leqq 3$ のとき，M の値は m の値によって変化する．このとき，M がとりうる整数値は $\boxed{\text{サ}}$ 個ある．また，M が最小の整数値をとるのは，

$m=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のときとなる．

3.【目標解答時間：15 分】

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ とする．xy 平面上で，点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

と表される．この式が成り立つことを証明しよう．

(1)　まず，原点 O と直線 $ax+by+c=0$ の距離 h が $h=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ と表されることを，次の **方針 1** または **方針 2** により示してみよう．

方針 1

$c\neq0$ のとき，原点 O から直線 $ax+by+c=0$ に垂線 OH を下ろすと，$h=\mathrm{OH}$ である．

直線 OH の方程式は $\boxed{\text{ア}}x-\boxed{\text{イ}}y=0$ であるから，点 H の座標は

$\left(-\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\ -\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)$ である．よって，$h=\mathrm{OH}=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ …(*) が得られる．

また，$c=0$ のとき，直線 $ax+by+c=0$ は原点を通るから　$h=0$　となる．

よって，(*) は $c=0$ のときも成り立つ．

方針 2

$c\neq0$ とする．円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ が直線 $ax+by+c=0$ に接するとき，$r=h$ である．

[1]　$b\neq0$ のとき，円の方程式と直線の方程式から y を消去すると，2 次方程式

$(\boxed{\text{キ}})x^2+2\boxed{\text{ク}}x+\boxed{\text{ケ}}-\boxed{\text{コ}}r^2=0$ が得られる．この 2 次方程式の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=\boxed{\text{サ}}\{(\boxed{\text{シ}})r^2-\boxed{\text{ス}}\}$ となる．

円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $ax+by+c=0$ が接するとき，$D=0$，$r=h$ であるから，

$h=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ …(**) が得られる．

[2]　$b=0$ のとき，原点 O と直線 $ax+by+c=0$ の距離 h は，$h=\left|\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right|$ となるので，(**) は $b=0$ のときも成り立つ．

$c=0$ のときは **方針 1** と同様である．

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまる文字を答えよ．また，$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから 1 つずつ選べ．ただし，同じものをくり返し選んでもよい．

⓪ a^2　① b^2　② c^2　③ ab　④ bc

⑤ ca　⑥ a^2+b^2　⑦ b^2+c^2　⑧ c^2+a^2

(2)　次に，(1) の結果を利用して，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

と表されることを示してみよう．

点Pと直線 $ax+by+c=0$ をそれぞれ $\boxed{\text{タ}}$ だけ平行移動させると，点Pは原点Oに，直線 $ax+by+c=0$ は直線 $\boxed{\text{チ}}$ に移る．点Pと直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は，原点Oと直線 $\boxed{\text{チ}}$ の距離に等しいから (1) より，$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ が得られる．

$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，次の各解答群のうちから1つずつ選べ．

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ x 軸方向に x_1，y 軸方向に y_1　　① x 軸方向に $-x_1$，y 軸方向に y_1

② x 軸方向に x_1，y 軸方向に $-y_1$　　③ x 軸方向に $-x_1$，y 軸方向に $-y_1$

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

⓪ $bx+ay+bx_1+ay_1+c=0$　　① $bx+ay-(bx_1+ay_1+c)=0$

② $ax+by+ax_1+by_1+c=0$　　③ $ax+by-(ax_1+by_1+c)=0$

④ $bx+ay+ax_1+by_1+c=0$　　⑤ $bx+ay-(ax_1+by_1+c)=0$

4. 【目標解答時間：18 分】

$y=(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta-2a)(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)+a(a-2)$ について考える．ただし，a は実数とする．

$t=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ とおくと，$t=\boxed{\text{ア}}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}\right)$ である．また，y を t で表すと $y=\left(t-\boxed{\text{ウ}}\right)^2-\boxed{\text{エオ}}$ である．

(1) $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，t のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{カキ}}\leqq t\leqq\boxed{\text{ク}}$ である．このとき，y の最小値を $m(a)$ とすると，$m(a)$ は $a=\boxed{\text{ケ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{コサ}}$ をとる．

(2) $a=\dfrac{3}{2}$ とする．このとき，y の最小値が -3 となるような θ の範囲を，次の ⓪～④ のうちから 2 つ選べ．ただし，解答の順序は問わない．$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$

⓪ $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$　　① $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$　　② $\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$

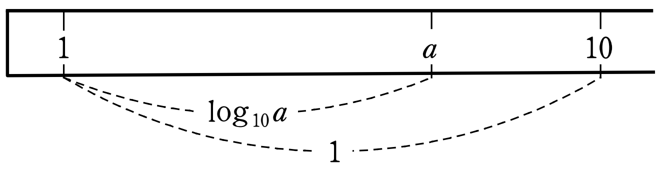
③ $\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$　　④ $\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

5. 【目標解答時間：12 分】

(1)　次のようにして対数尺 S をつくる.

＜対数尺 S＞

1 の目盛りから右に $\log_{10}a$ だけ離れたところに a の目盛りをかく.



(i)　対数尺 S において，目盛り 2 と目盛り 5 の間隔は，目盛り 5 と目盛り 8 の間隔 $\boxed{\text{ア}}$. $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～② のうちから 1 つ選べ.

⓪　に等しい　　　①　より大きい　　　②　より小さい

(ii)　下の 図 1 において，①，② はともに対数尺 S であり，① の目盛り a を ② の目盛り c に合わせたとき，① の目盛り b が ② の目盛り d に合ったとする.

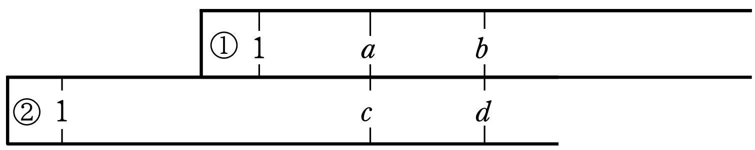


図 1

このとき，a，b，c，d には $\boxed{\text{イ}}$ という関係式が成り立つ. $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～② のうちから 1 つ選べ.

⓪　$ab=cd$　　　①　$ac=bd$　　　②　$ad=bc$

(2)　1 の目盛りから左に $\log_{10}a$ だけ離れたところに a の目盛りをかいたものを対数尺 T とする. すなわち，対数尺 T は対数尺 S に対して，目盛りの向きを反対にしたものである.

次の 図 2 において，② は対数尺 S，③ は対数尺 T であり，③ の目盛り f を ② の目盛り c に合わせたとき，③ の目盛り e が ② の目盛り d に合ったとする.

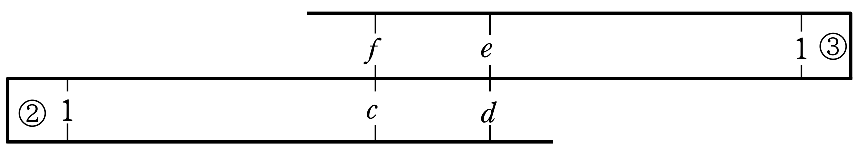


図 2

このとき，c，d，e，f には $\boxed{\text{ウ}}$ という関係式が成り立つ. $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～② のうちから 1 つ選べ.

⓪　$cd=ef$　　　①　$ce=df$　　　②　$cf=de$

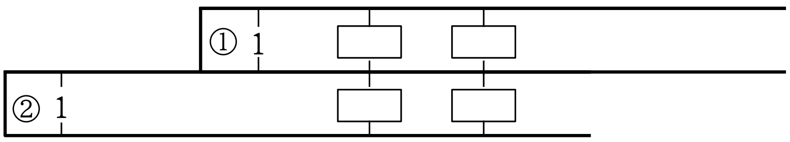
(3)　次の (A)，(B) の比例式を満たす x の値を，2 つの対数尺 S を用いて調べるとするならば，その方法として最も適当なものを，次の ⓪～② のうちから 1 つずつ選べ.

(A)　比例式 $3.5:5.2=4.3:x$　［方法］ $\boxed{\text{エ}}$

(B)　比例式 $4.3:5.2=3.5:x$　［方法］ $\boxed{\text{オ}}$

[方法]

対数尺 S である ①，② を下の図のように並べ，



⓪　① の目盛り 3.5 に ② の目盛り 5.2 を合わせたときの，① の目盛り 4.3 に対応する ② の目盛りを調べる．

①　② の目盛り 5.2 に ① の目盛り 3.5 を合わせたときの，② の目盛り 4.3 に対応する ① の目盛りを調べる．

②　② の目盛り 4.3 に ① の目盛り 3.5 を合わせたときの，② の目盛り 5.2 に対応する ① の目盛りを調べる．

6.【目標解答時間：20 分】

正の実数 p に対して，放物線 $y=x^2-2p+1$ を C とし，点 $(p,\ 0)$ を P とする．

(1) 点 P を通り，放物線 C に接する直線の方程式を求めよう．

C 上の点 $(t,\ t^2-2p+1)$ における接線の方程式は $y=2tx-t^2-\boxed{\text{ア}}p+\boxed{\text{イ}}$ である．この直線が点 P を通るから，$t=\boxed{\text{ウ}}p-\boxed{\text{エ}}$，1 となる．

よって，$p\fallingdotseq 1$ のとき，P を通る C の接線は 2 本あり，それらの方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{オ}}p-\boxed{\text{カ}}\right)x-\boxed{\text{キ}}p^2+\boxed{\text{ク}}p \quad \cdots ①$$

と

$$y=2x-\boxed{\text{ケ}}p \quad \cdots ②$$

である．

(2) $0<p<1$ のとき，放物線 C と直線 ① の接点を Q，放物線 C と直線 ② の接点を R とし，放物線 C と 2 直線 ①，② で囲まれた図形の面積を S_1，放物線 C と直線 QR で囲まれた図形の面積を S_2 とする．

$$S_1=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\left(\boxed{\text{シ}}-p\right)^3,\ S_2=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\boxed{\text{シ}}-p\right)^3$$ であるから，$S_1:S_2=\boxed{\text{ソ}}$

である．

$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものは，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから 1 つ選べ．

⓪ 2：1　① 3：1　② 3：2　③ 1：2　④ 1：3　⑤ 2：3

(3) $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ とし，放物線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ $(\alpha<\beta)$ における接線をそれぞれ l，m とする．

(i) 2 直線 l，m の交点の x 座標は $\boxed{\text{タ}}$ である．

(ii) $\boxed{\text{タ}}=u$ とおく．放物線 $y=f(x)$ と接線 l，および直線 $x=u$ で囲まれた図形の面積を A とし，放物線 $y=f(x)$ と接線 m，および直線 $x=u$ で囲まれた図形の面積を B とする．このとき，A と B の間に成り立つ式は $\boxed{\text{チ}}$ である．

(iii) $A+B=\boxed{\text{ツ}}$ である．

$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまる最も適当なものを，次の各解答群のうちから 1 つずつ選べ．

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ $\beta+\alpha$　① $\beta-\alpha$　② $\dfrac{\beta+\alpha}{2}$　③ $\dfrac{\beta-\alpha}{2}$　④ $\dfrac{\beta-\alpha}{6}$

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

⓪ $2A-B=0$　① $A-2B=0$　② $3A-B=0$　③ $A-B=0$

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{2}$　① $\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$　② $\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{12}$　③ $\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{24}$

7.【目標解答時間：18 分】

太郎さんと花子さんは，数列の漸化式に関する 問題 A，問題 B について話している．2 人の会話を読んで，下の問いに答えよ．

(1)

> 問題 A　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．
>
> $$a_1=8,\ a_{n+1}=4a_n-9\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

> 花子：k を定数として，$a_{n+1}=4a_n-9$ を $a_{n+1}-k=4(a_n-k)$ の形に変形するといいんだよね．
>
> 太郎：そうだね．そうすると，よく知っている数列に結びつけられるね．

$k=\boxed{ア}$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{イ}\cdot\boxed{ウ}^{n-1}+\boxed{エ}$$

である．

(2)

> 問題 B　次のように定められた数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．
>
> $$b_1=4,\ b_{n+1}=4b_n-9n+6\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

> 花子：求め方の方針が立たないよ．
>
> 太郎：$n=1,\ 2,\ 3$ を代入して具体的な数列の様子をみるといいよ．
>
> 花子：$b_2=13$，$b_3=40$，$b_4=139$ となったけど…．
>
> 太郎：並んだ項の差を求めてみたらどうかな．

数列 $\{b_n\}$ に対して，$p_n=b_{n+1}-b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ と定める．$p_1=\boxed{オ}$，$p_{n+1}=\boxed{カ}p_n-\boxed{キ}$ であるから，数列 $\{p_n\}$ の一般項は

$$p_n=\boxed{ク}\cdot\boxed{ケ}^{2n-1}+\boxed{コ}$$

である．

(3)　2 人は 問題 B について引き続き会話をしている．

> 花子：問題 A の式変形の考え方を 問題 B に応用できないかな．
>
> 太郎：問題 B の漸化式 $b_{n+1}=4b_n-9n+6$ を，定数 s，t を用いて
>
> $\boxed{サ}=4\left(\boxed{シ}\right)$ の式に変形したらどうかな．

(i)　$q_n=\boxed{シ}$ とおくと，太郎さんの変形により数列 $\{q_n\}$ が公比 4 の等比数列と分かる．このとき，$\boxed{サ}$，$\boxed{シ}$ に当てはまる式を，次の ⓪～③ のうちから 1 つずつ選べ．ただし，同じものを選んでもよい．

⓪　b_n+sn+t　　　①　$b_{n+1}+sn+t$

② $b_n+s(n+1)+t$　　　　③ $b_{n+1}+s(n+1)+t$

(ii)　$s=$ $\boxed{\text{スセ}}$，$t=$ $\boxed{\text{ソ}}$ である．

(4)　問題 B の数列は，(2) の方法でも (3) の方法でも一般項を求めることができる．数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\boxed{\text{タ}}^{2n-1}+\boxed{\text{チ}}n-\boxed{\text{ツ}}$ である．

(5)　次のように定められた数列 $\{c_n\}$ がある．

$$c_1=5,\ c_{n+1}=2c_n-3n^2+5n+6\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=\boxed{\text{テ}}\cdot\boxed{\text{ト}}^{n-1}+\boxed{\text{ナ}}n^2+n-\boxed{\text{ニ}}$ である．

8.【目標解答時間：18 分】

O を原点とする座標空間の異なる 4 点 A，B，C，D に関して，図形 ABCD がひし形であるための必要十分条件として **適当でないもの** を，次の ⓪ ～ ② のうちから 1 つ選べ． $\boxed{\text{ア}}$

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$

① $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

② $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|$

4 点の座標を $\mathrm{A}(p,\ p,\ p)$，$\mathrm{B}(2,\ -3,\ -1)$，$\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$，$\mathrm{D}(1,\ 1,\ -2)$ とし，図形 ABCD はひし形であるとする．このとき

$$p=\boxed{\text{イウ}},\ a=\boxed{\text{エ}},\ b=\boxed{\text{オ}},\ c=\boxed{\text{カキ}}$$

である．この 4 点について，次の問いに答えよ．

(1) 平面 ABC 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の両方に垂直なベクトル $\vec{n}=\left(1,\ -\boxed{\text{ク}},\ -\boxed{\text{ケ}}\right)$ に対して $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ が成り立つから，x，y，z は関係式

$$x-y-\boxed{\text{コ}}z=\boxed{\text{サシ}}\ \cdots(*)$$

を満たすことが分かる．

(2) $\mathrm{E}(4,\ -3,\ -6)$ を頂点とし，ひし形 ABCD を底面とする四角錐 E－ABCD を考える．点 E から平面 ABC に垂線 EH を下ろし，点 H の座標を $(x',\ y',\ z')$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{EH}}$ と (1) の $\vec{n}$ は平行であるから，実数 k を用いて

$$x'=k+\boxed{\text{ス}},\ y'=\boxed{\text{セ}}k-\boxed{\text{ソ}},\ z'=\boxed{\text{タチ}}k-\boxed{\text{ツ}}$$

とおける．ここで，点 H は平面 ABC 上の点であるから $k=\boxed{\text{テト}}$ である．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\boxed{\text{ナ}}$ と表されるから，点 H は $\boxed{\text{ニ}}$ にある．また，四角錐 E－ABCDの体積は $\boxed{\text{ヌネ}}$ である．

$\boxed{\text{ナ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものは，次の各解答群のうちから 1 つずつ選べ．

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　　① $\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

② $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　　③ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

⓪ ひし形 ABCD の内部

① ひし形 ABCD の周上

② ひし形 ABCD の外部

9.【目標解答時間：18 分】

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=3$ とする．

(1) 四面体 OABC の体積を求めよう。頂点 A から △OBC に垂線 AH を下ろすと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ について次の 条件 (a)， 条件 (b) が成り立つ．

点 H が平面 OBC 上にあるから　$\boxed{\text{ア}}$ … (a)

直線 AH と平面 OBC が垂直であるから　$\boxed{\text{イ}}$ … (b)

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから 1 つずつ選べ．

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ (ただし，s，t は実数)

① $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ (ただし，s，t は実数)

② $(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$ かつ $(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\vec{a})\cdot\vec{c}=0$

③ $(\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\vec{a})\cdot\vec{b}=0$ かつ $(\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\vec{a})\cdot\vec{c}=0$

(a)， (b) から，$s=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$，$t=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であるので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\frac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である．

次に，$\angle\mathrm{BOC}=\boxed{\text{コサ}}^\circ$ であるから，$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である．したがって，四面体 OABC の体積は $\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ である．

(2) 点 H を (1) のものとし，M を辺 AB の中点，P を辺 OC 上の点とする．線分 AH，線分 PM が点 R で交わるときを考える．点 P は辺 OC 上の点であるから，k を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{c}$ とおける．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ について，l，m を実数として次の条件 (c)， 条件 (d) が成り立つ．点 R は，線分 AH 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-l)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+l\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-l)\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}l\vec{b}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}l\vec{c}\ \cdots\ \text{(c)}$$

点 R は，線分 PM 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-m)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+m\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}m\vec{a}+\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}m\vec{b}+(1-m)k\vec{c}\ \cdots\ \text{(d)}$$

$\boxed{\text{ツ}}$ から，(c)，(d) の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数を比較して $k=\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ となる．このとき，

$\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boxed{\text{ナ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boxed{\text{ナ}}$ である．

$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものは，次の ⓪ ～ ③ のうちから 1 つ選べ．

⓪ 線分 AH と線分 PM が 1 点で交わっていること

① 線分 AH と線分 PM がねじれの位置にあること

② 4 点 A，H，P，M が同じ平面上にないこと

③ 4 点 O，A，B，C が同じ平面上にないこと

【答】

1. アイ　11　ウエ　38　オ　①　カ　4　キク　13　ケ　4　コ　6
サシ　13　スセソ　143　タ　2　チ　8　ツ　③

2. ア　2　イ　2　ウ　3　エ　5　オ　3　カ　2　キ　1　ク　9　ケ　9
コ　0　サ　4　$\frac{\text{シ}}{\text{ス}}$　$\frac{3}{2}$

3. ア　b　イ　a　ウ　⑤　エ　⑥　オ　④　カ　⑥　キ　⑥　ク　⑤
ケ　②　コ　①　サ　①　シ　⑥　ス　②　$\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$　$\frac{c}{a}$　タ　③　チ　②

4. ア　2　イ　3　ウ　a　エオ　$2a$　カキ　-1　ク　2　ケ　3
コサ　-5　シ，ス　①，④（順不同）

5. ア　①　イ　②　ウ　②　エ　⓪　オ　②

6. ア　2　イ　1　ウ　2　エ　1　オ　4　カ　2　キ　4　ク　2　ケ　2
$\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$　$\frac{2}{3}$　シ　1　$\frac{\text{ス}}{\text{セ}}$　$\frac{4}{3}$　ソ　③　タ　②　チ　③　ツ　②

7. ア　3　イ　5　ウ　4　エ　3　オ　9　カ　4　キ　9　ク　3　ケ　2
コ　3　サ　③　シ　⓪　スセ　-3　ソ　1　タ　2　チ　3　ツ　1
テ　3　ト　2　ナ　3　ニ　2

8. ア　②　イウ　-2　エ　5　オ　0　カキ　-1　ク　1　ケ　5　コ　5
サシ　10　ス　4　セ　$-$　ソ　3　タチ　-5　ツ　6　テト　-1
ナ　②　ニ　①　ヌネ　27

9. ア　⓪　イ　②　$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$　$\frac{1}{3}$　$\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$　$\frac{2}{9}$　$\frac{\text{キ}\sqrt{\text{ク}}}{\text{ケ}}$　$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　コサ　60
$\frac{\text{シ}\sqrt{\text{ス}}}{\text{セ}}$　$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　$\sqrt{\text{ソ}}$　$\sqrt{2}$　$\frac{\text{タ}}{\text{チ}}$　$\frac{1}{2}$　ツ　③　$\frac{\text{テ}}{\text{ト}}$　$\frac{1}{3}$　ナ　0　ニ　0

解説

1. (1)　$(2+3i)^2=2^2+12i+9i^2=-5+12i$ から

$$(2+3i)^3=(2+3i)(-5+12i)=-10+24i-15i+36i^2=-46+9i$$

よって　$2(-46+9i)-a(-5+12i)+b(2+3i)-39=0$

ゆえに　$5a+2b-131+(-12a+3b+18)i=0$

$5a+2b-131$，$-12a+3b+18$ は実数であるから

$$5a+2b-131=0,\quad -12a+3b+18=0$$

$5a+2b-131=0$，$4a-b-6=0$ を連立して解くと　$a=11$，$b=38$

(2)　実数係数の 3 次方程式 ① が虚数解 $2+3i$ をもつから，それと共役な複素数

$2-3i$ (⓪) も方程式 ① の解である．

(3)　(カ) ～ (スセソ)

$$2+3i+2-3i=4,\ (2+3i)(2-3i)=2^2-(3i)^2=4-9i^2=13$$

ゆえに，$2+3i$ と $2-3i$ を解にもつ 2 次方程式の 1 つは，$x^2-4x+13=0$ である．

$2x^3-ax^2+bx-39$ を $x^2-4x+13$ で割ると

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x+(-a+8) \\
\hline
x^2-4x+13 & 2x^3-ax^2+bx-39 \\
 & 2x^3-8x^2+26x \\
\hline
 & (-a+8)x^2+(b-26)x-39 \\
 & (-a+8)x^2+(4a-32)x-13a+104 \\
\hline
 & (-4a+b+6)x+13a-143
\end{array}$$

よって，余りは　$(-4a+b+6)x+13a-143$

$2x^3-ax^2+bx-39$ は $x^2-4x+13$ で割り切れるから，余りは 0 となる．

ゆえに　$(-4a+b+6)x+13a-143=0$

これが x の恒等式であるから　$-4a+b+6=0$，$13a-143=0$

これを連立して解くと　$a=11$，$b=38$

(タ) ～ (ツ)　$2x^3-ax^2+bx-39$ を $x^2-4x+13$ で割ったときの商は，$2x-a+8$ である．$a=11$ であるから，$2x-a+8$ は $2x-3$ となる．

このとき，3 次方程式 ① は $(x^2-4x+13)(2x-3)=0$ となる．

よって，3 次方程式 ① の $2+3i$ 以外の解は，$2-3i$ と $\dfrac{3}{2}$ (③) である．

2. $x+my=2m+3$ ……① とする．

① を m について整理すると　$(y-2)m+x-3=0$ ……①′

m の値に関わらず ①′ が成り立つための条件は　$y-2=0$　かつ　$x-3=0$

ゆえに　$x=3$，$y=2$

よって，直線 ① は m の値に関わらず点 $(3,\ 2)$ を通る．

また，① に $y=0$ を代入すると　$x=2m+3$

ゆえに，直線 ① の x 切片は　$2m+3$

次に，与えられた 4 つの不等式が表す領域を D とし，$x+3y=9$ ……② とすると，直線 ② は点 $(3,\ 2)$ を通る．

$x+y=k$ ……③ とおくと，$y=-x+k$ より，③ は傾き -1，y 切片 k の直線を表す．

直線 ③ が領域 D と共有点をもつような k の最大値が M である．

(1)　$m=\dfrac{1}{4}$ のとき，① は　　$x+\dfrac{1}{4}y=\dfrac{7}{2}$

すなわち　$y=-4x+14$

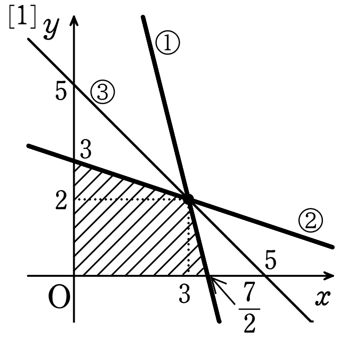
よって，このときの領域 D は図 [1] の斜線部分である．

ただし，境界線を含む．

図 [1] から，k の値は，直線 ③ が点 $(3,\ 2)$ を通るとき最大となる．

ゆえに，$M=5$ であり，このときの x，y の値は

$x=3$，$y=2$



(2)　$m>0$ であるから，直線 ① の x 切片 $2m+3$ について　　$2m+3>3$

図 [2] から，$3<2m+3\leqq 5$ のとき，m の値に関わらず $M=5$ となる．

$2m+3\leqq 5$ から　　$2m\leqq 2$　　よって　　$m\leqq 1$

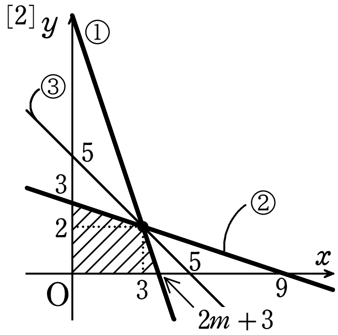
ゆえに，$0<m\leqq 1$ のとき，m の値に関わらず $M=5$ である．

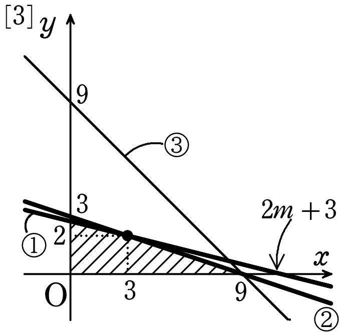
また，$3<m$ のとき　　$9<2m+3$

このとき，図 [3] から，k の値は，直線 ③ が点 $(9,\ 0)$ を通るとき最大となる．

ゆえに，$3<m$ のとき，m の値に関わらず $M=9$ であり，このときの x，y の値は

$x=9$，$y=0$





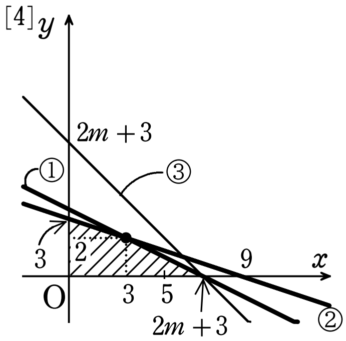
$1<m\leqq 3$ のとき，図 [4] から，k の値は，直線 ③ が点 $(2m+3,\ 0)$ を通るとき最大となる．このとき

$M=2m+3$

$1<m\leqq 3$ より，$5<2m+3\leqq 9$ であるから，M がとりうる整数値は

6，7，8，9

の 4 個あり，$M=6$ のとき $2m+3=6$ から　　$m=\dfrac{3}{2}$



3. (1)　(方針 1)　$c\neq 0$ のとき，直線 OH は原点 O を通り，直線 $ax+by+c=0$ に垂直であるから，その方程式は

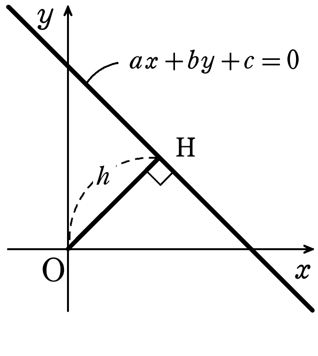
$bx-ay=0$

直線 $ax+by+c=0$ …… ①，直線 $bx-ay=0$ …… ② とする．

①$\times a+$②$\times b$ から　　$(a^2+b^2)x+ac=0$

$a^2+b^2>0$ から　　$x=-\dfrac{ca}{a^2+b^2}$

①$\times b-$②$\times a$ から　　$(a^2+b^2)y+bc=0$



$a^2+b^2>0$ から　　$y=-\dfrac{bc}{a^2+b^2}$

ゆえに，点 H の座標は　　$\left(-\dfrac{ca}{a^2+b^2},\ -\dfrac{bc}{a^2+b^2}\right)$　（ウ ⑤，エ ⑥，オ ④，カ ⑥）

よって　　$\mathrm{OH}^2=\left(-\dfrac{ca}{a^2+b^2}\right)^2+\left(-\dfrac{bc}{a^2+b^2}\right)^2=\dfrac{(a^2+b^2)c^2}{(a^2+b^2)^2}=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$

ゆえに　　$h=\mathrm{OH}=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　……(*)

また，$c=0$ のときは，$h=0$ であるから，(*) は $c=0$ のときも成り立つ．

（方針 2）

[1]　$b\fallingdotseq 0$ のとき，$ax+by+c=0$ から　　$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

　これを円の方程式 $x^2+y^2=r^2$ に代入すると　　$x^2+\left(-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}\right)^2=r^2$

　両辺に b^2 を掛けて　　$b^2x^2+(-ax-c)^2=b^2r^2$

　左辺を展開して整理すると

$$(a^2+b^2)x^2+2cax+c^2-b^2r^2=0$$　（キ ⑥，ク ⑤，ケ ②，コ ①）

　この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(ca)^2-(a^2+b^2)(c^2-b^2r^2)=c^2a^2-a^2c^2+a^2b^2r^2-b^2c^2+b^4r^2$$

$$=b^2(a^2r^2-c^2+b^2r^2)=b^2\{(a^2+b^2)r^2-c^2\}$$　（サ ①，シ ⑥，ス ②）

　円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $ax+by+c=0$ が接するとき，$D=0$，$r=h$ であるから

　　$b^2\{(a^2+b^2)h^2-c^2\}=0$　　　$b\fallingdotseq 0$ から　　$(a^2+b^2)h^2-c^2=0$

　$a^2+b^2>0$ から　　$h^2=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$　　　ゆえに　　$h=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　……(**)

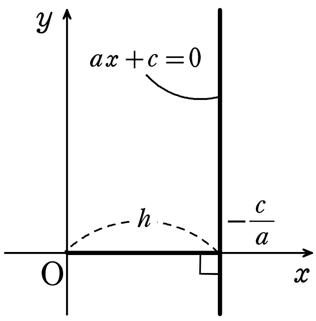
[2]　$b=0$ のとき，原点 O と直線 $ax+c=0$ の距離 h は

$$h=\left|-\frac{c}{a}\right|\quad すなわち\quad h=\left|\frac{c}{a}\right|$$

　これは，(**) において，$b=0$ とすると得られるから，

　(**) は $b=0$ のときも成り立つ．

（$c=0$ のときは方針 1 と同様）

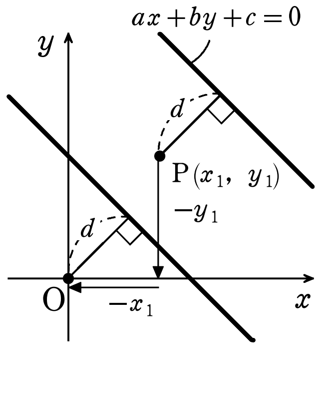


(2)　点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ をそれぞれ x 軸方向に $-x_1$，y 軸方向に $-y_1$（③）だけ平行移動すると，点 P は原点 O に，直線 $ax+by+c=0$ は直線 $a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0$ に移る．

$a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0$ から

$$ax+by+ax_1+by_1+c=0$$　（②）

点 P と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は，原点 O と直線 $ax+by+ax_1+by_1+c=0$ の距離に等しいから，(1) より $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ が得られる．



4. $t=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

また　　$y=(t-2a)t+a(a-2)=t^2-2at+a^2-2a=(t-a)^2-2a$

(1)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ のとき　　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$

よって　　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq1$　　ゆえに　　$-1\leqq t\leqq2$

ここで，$f(t)=(t-a)^2-2a$　$(-1\leqq t\leqq2)$ とする．

$y=f(t)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $t=a$ である

[1]　$a<-1$ のとき

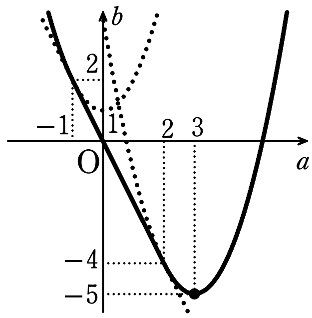
$m(a)=f(-1)=a^2+1$

[2]　$-1\leqq a\leqq2$ のとき

$m(a)=f(a)=-2a$

[3]　$2<a$ のとき

$m(a)=f(2)=a^2-6a+4=(a-3)^2-5$



$b=m(a)$ のグラフは，右の図の実線部分のようになる．

よって，$m(a)$ は $a=3$ のとき最小値 -5 をとる．

(2)　$a=\dfrac{3}{2}$ のとき　　$y=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2-3$　……①

関数①の最小値が -3 となるのは，t の変域に $\dfrac{3}{2}$ が含まれるときである．

⓪　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{\pi}{6}$ であるから　　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq\dfrac{1}{2}$

よって　　$-\sqrt{3}\leqq t\leqq1$　　$t=\dfrac{3}{2}$ は，この範囲に含まれない．

①　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ であるから　　$\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq1$

よって　　$1\leqq t\leqq2$　　$t=\dfrac{3}{2}$ は，この範囲に含まれる．

②　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq0$ であるから　　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq0$

よって　　$-1\leqq t\leqq0$　　$t=\dfrac{3}{2}$ は，この範囲に含まれない．

③　$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq1$

よって　　$\sqrt{3}\leqq t\leqq2$　　$t=\dfrac{3}{2}$ は，この範囲に含まれない．

④　$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{4}{3}\pi$ であるから　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq1$

よって　　$-\sqrt{3}\leqq t\leqq2$　　$t=\dfrac{3}{2}$ は，この範囲に含まれる．

以上から，適する θ の範囲は　　①，④

5. (1) (i) 目盛り 2 と目盛り 5 の間隔は　$\log_{10}5-\log_{10}2=\log_{10}\frac{5}{2}$

目盛り 5 と目盛り 8 の間隔は　$\log_{10}8-\log_{10}5=\log_{10}\frac{8}{5}$

$\frac{5}{2}>\frac{8}{5}$ であるから，目盛り 2 と目盛り 5 の間隔は目盛り 5 と目盛り 8 の間隔より大きい．(①)

(ii) ① において，目盛り a と目盛り b の間隔は　$\log_{10}b-\log_{10}a=\log_{10}\frac{b}{a}$

② において，目盛り c と目盛り d の間隔は　$\log_{10}d-\log_{10}c=\log_{10}\frac{d}{c}$

ゆえに　$\log_{10}\frac{b}{a}=\log_{10}\frac{d}{c}$

よって　$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$　すなわち　$ad=bc$　(②)

(2) ③ において，目盛り e と目盛り f の間隔は　$\log_{10}f-\log_{10}e=\log_{10}\frac{f}{e}$

ゆえに　$\log_{10}\frac{f}{e}=\log_{10}\frac{d}{c}$

よって　$\frac{f}{e}=\frac{d}{c}$　すなわち　$cf=de$　(②)

(3) (1) の (ii) において，$ad=bc$ であるから　$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

よって，対数尺 ①，② について，向かい合った目盛りの比が一定である．このことを利用して，(A)，(B) の比例式について考える．

(A) について，

$$3.5:5.2=4.3:x \iff \frac{3.5}{5.2}=\frac{4.3}{x}$$

であるから，① の目盛り 3.5 に ② の目盛り 5.2 を合わせたときの，① の目盛り 4.3 に対応する ② の目盛りが x である．(⓪)

(B) について，

$$4.3:5.2=3.5:x \iff \frac{4.3}{5.2}=\frac{3.5}{x} \iff \frac{3.5}{4.3}=\frac{x}{5.2}$$

であるから，② の目盛り 4.3 に ① の目盛り 3.5 を合わせたときの，② の目盛り 5.2 に対応する ① の目盛りが x である．(②)

6. (1) $y'=2x$ から，C 上の点 $(t,\ t^2-2p+1)$ における接線の方程式は

$$y-(t^2-2p+1)=2t(x-t)\quad すなわち\quad y=2tx-t^2-2p+1$$

この直線が点 P を通るから　$0=2t\cdot p-t^2-2p+1$　すなわち　$t^2-2pt+2p-1=0$

$\{t-(2p-1)\}(t-1)=0$ から　$t=2p-1,\ 1$

$p\neq 1$ のとき，$2p-1\neq 1$ であるから，点 P を通る C の接線は 2 本あり，それらの方程式は

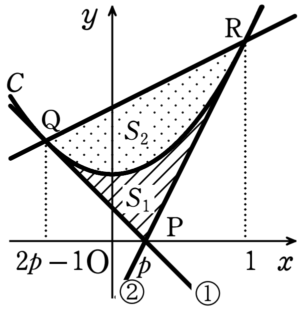
$t=2p-1$ のとき

$$y=2(2p-1)x-(2p-1)^2-2p+1\quad すなわち\quad y=(4p-2)x-4p^2+2p\quad \cdots\cdots ①$$

また，$t=1$ のとき　$y=2\cdot 1\cdot x-1^2-2p+1$　すなわち　$y=2x-2p$　……②

(2)　$0<p<1$ のとき　　$2p-1<p<1$

よって，放物線 C と 2 直線 ①，② で囲まれた図形は右の図の斜線部分のようになる．



したがって，求める面積 S_1 は

$$S_1=\int_{2p-1}^{p}[x^2-2p+1-\{(4p-2)x-4p^2+2p\}]dx$$
$$+\int_{p}^{1}\{x^2-2p+1-(2x-2p)\}dx$$
$$=\int_{2p-1}^{p}\{x^2-2(2p-1)x+4p^2-4p+1\}dx+\int_{p}^{1}(x^2-2x+1)dx$$
$$=\int_{2p-1}^{p}\{x-(2p-1)\}^2dx+\int_{p}^{1}(x-1)^2dx=\left[\frac{\{x-(2p-1)\}^3}{3}\right]_{2p-1}^{p}+\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{p}^{1}$$
$$=\frac{2}{3}(1-p)^3$$

また，Q$(2p-1,\ 4p^2-6p+2)$，R$(1,\ 2-2p)$ であるから，直線 QR の傾きは

$$\frac{2-2p-(4p^2-6p+2)}{1-(2p-1)}=2p$$

よって，直線 QR の方程式は　　$y-(2-2p)=2p(x-1)$　すなわち　$y=2px-4p+2$

ゆえに　　$S_2=\int_{2p-1}^{1}\{2px-4p+2-(x^2-2p+1)\}dx=-\int_{2p-1}^{1}(x^2-2px+2p-1)dx$

$$=-\int_{2p-1}^{1}\{x-(2p-1)\}(x-1)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(2p-1)\}^3=\frac{4}{3}(1-p)^3$$

よって　　$S_1:S_2=1:2$　（③）

(3)　(i)　$f'(x)=2ax+b$ から，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の方程式は　　$y-(a\alpha^2+b\alpha+c)=(2a\alpha+b)(x-\alpha)$

すなわち　$y=(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c$　…③

同様に，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(\beta,\ f(\beta))$ における接線の方程式は

$$y=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c\quad \cdots\cdots ④$$

2 直線 ℓ，m の交点の x 座標は，③，④ から y を消去して

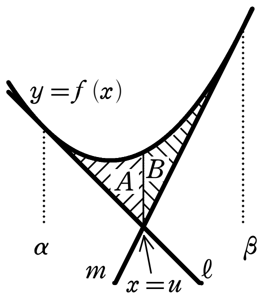
$$(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c$$

整理して　$2a(\beta-\alpha)x=a(\beta^2-\alpha^2)$

よって　　$2a(\beta-\alpha)x=a(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)$

$a>0$，$\alpha<\beta$ であるから　　$x=\dfrac{\beta+\alpha}{2}$　（②）

(ii)　$\dfrac{\beta+\alpha}{2}=u$ とおくと



$$A=\int_{\alpha}^{u}[ax^2+bx+c-\{(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c\}]dx$$
$$=\int_{\alpha}^{u}a(x^2-2\alpha x+\alpha^2)dx=\int_{\alpha}^{u}a(x-\alpha)^2dx$$
$$=\left[\frac{a(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\alpha}^{u}=\frac{a(u-\alpha)^3}{3}=\frac{a}{3}\left(\frac{\beta+\alpha}{2}-\alpha\right)^3$$
$$=\frac{a(\beta-\alpha)^3}{24}$$

$$B=\int_u^\beta [ax^2+bx+c-\{(2a\beta+b)x-a\beta^2+c\}]dx=\int_u^\beta a(x^2-2\beta x+\beta^2)dx$$

$$=\int_u^\beta a(x-\beta)^2dx=\left[\frac{a(x-\beta)^3}{3}\right]_u^\beta=\frac{a(\beta-u)^3}{3}=\frac{a}{3}\left(\beta-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^3=\frac{a(\beta-\alpha)^3}{24}$$

よって　$A=B$　すなわち　$A-B=0$　(③)

(iii)　(ii) から　$A+B=2\cdot\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{24}=\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{12}$　(②)

7. (1)　$k=4k-9$ として　$k=3$　ゆえに　$a_{n+1}-3=4(a_n-3)$

また　$a_1-3=8-3=5$

よって，数列 $\{a_n-3\}$ は初項 5，公比 4 の等比数列であるから　$a_n-3=5\cdot4^{n-1}$

したがって　$a_n=5\cdot4^{n-1}+3$

(2)　$b_{n+1}=4b_n-9n+6$ ……①　とする．

$p_n=b_{n+1}-b_n$ とすると　$p_1=b_2-b_1=13-4=9$

また，① から　$b_{n+2}=4b_{n+1}-9(n+1)+6$ ……②

②−① から　$b_{n+2}-b_{n+1}=4(b_{n+1}-b_n)-9$　すなわち　$p_{n+1}=4p_n-9$

(1) と同様に考えると　$p_{n+1}-3=4(p_n-3)$

$p_1-3=6$ より，数列 $\{p_n-3\}$ は初項 6，公比 4 の等比数列であるから

$p_n-3=6\cdot4^{n-1}$　ゆえに　$p_n=6\cdot4^{n-1}+3=3\cdot2^{2n-1}+3$

(3)　(i)　$b_{n+1}=4b_n-9n+6$ を

$$b_{n+1}+s(n+1)+t=4(b_n+sn+t)$$

の形に変形することを考える．このとき，$q_n=b_n+sn+t$ とおくと，$q_{n+1}=4q_n$ となり，数列 $\{q_n\}$ が公比 4 の等比数列とわかる．(サ ③，シ ⓪)

(ii)　$b_{n+1}+s(n+1)+t=4(b_n+sn+t)$ から　$b_{n+1}=4b_n+3sn-s+3t$

これと $b_{n+1}=4b_n-9n+6$ の右辺の係数を比較して　$3s=-9$，$-s+3t=6$

これを解いて　$s=-3$，$t=1$

(4)　(解法 1)　(2) より，$p_n=6\cdot4^{n-1}+3$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}p_k=4+\sum_{k=1}^{n-1}(6\cdot4^{k-1}+3)=4+6\cdot\frac{4^{n-1}-1}{4-1}+3(n-1)$$

$$=2\cdot4^{n-1}+3n-1=2^{2n-1}+3n-1$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ．

(解法 2)　(3) から　$q_n=b_n-3n+1$　よって　$q_1=b_1-3+1=2$

ゆえに，数列 $\{q_n\}$ は初項 2，公比 4 の等比数列であるから　$q_n=2\cdot4^{n-1}=2^{2n-1}$

すなわち　$b_n-3n+1=2^{2n-1}$

したがって　$b_n=2^{2n-1}+3n-1$

(5)　$c_{n+1}=2c_n-3n^2+5n+6$ を，定数 s'，t'，u' を用いて

$$c_{n+1}+s'(n+1)^2+t'(n+1)+u'=2(c_n+s'n^2+t'n+u')\quad\cdots\cdots ③$$

の形に変形することを考える．このとき，$r_n=c_n+s'n^2+t'n+u'$ とおくと，$r_{n+1}=2r_n$ となり，数列 $\{r_n\}$ は公比 2 の等比数列である．③ から

$$c_{n+1}=2c_n+2s'n^2-s'(n+1)^2+2t'n-t'(n+1)+u'$$

よって　$c_{n+1}=2c_n+s'n^2+(-2s'+t')n-s'-t'+u'$

これと $c_{n+1}=2c_n-3n^2+5n+6$ の右辺の係数を比較して

$$s'=-3,\ -2s'+t'=5,\ -s'-t'+u'=6$$

これを解いて　$s'=-3,\ t'=-1,\ u'=2$

ゆえに　$r_n=c_n-3n^2-n+2$　　よって　$r_1=c_1-3-1+2=3$

したがって，数列 $\{r_n\}$ は初項 3，公比 2 の等比数列であるから　$r_n=3\cdot 2^{n-1}$

すなわち　$c_n-3n^2-n+2=3\cdot 2^{n-1}$　　したがって　$c_n=3\cdot 2^{n-1}+3n^2+n-2$

8. ⓪　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のとき，AD＝BC かつ AD∥BC である．

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ のとき，AC⊥BD であるから，図形 ABCD は平行四辺形であり，かつ対角線が垂直に交わる．

よって，このとき図形 ABCD はひし形である．

①　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である．

さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ のとき，図形 ABCD は平行四辺形であり，かつ隣り合う 2 辺の長さが等しいから，平行四辺形 ABCD の 4 辺の長さは等しい．

よって，このとき図形 ABCD はひし形である．

②　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|$ のとき，4 点 A，B，C，D は同じ平面上にあるとは限らないから，図形 ABCD はひし形であるとはいえない．

(例えば，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|$ を満たす図形 ABCD として，正四面体 ABCD がある．)

以上から，図形 ABCD がひし形であるための必要十分条件として適当でないものは　②

次に，A$(p,\ p,\ p)$，B$(2,\ -3,\ -1)$，C$(a,\ b,\ c)$，D$(1,\ 1,\ -2)$ に対し，

図形ABCD がひし形のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ から

$$(1-p,\ 1-p,\ -2-p)=(a-2,\ b+3,\ c+1)$$

ゆえに　$a=3-p,\ b=-2-p,\ c=-3-p$　……①

また，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ から　$(a-p,\ b-p,\ c-p)\cdot(-1,\ 4,\ -1)=0$

よって　$p-a+4(b-p)+p-c=0$　すなわち　$a-4b+c+2p=0$　……②

② に ① を代入して　$3-p-4(-2-p)+(-3-p)+2p=0$

整理すると　$4p+8=0$　　ゆえに　$p=-2$

これを ① に代入して　$a=5,\ b=0,\ c=-1$

したがって　A$(-2,\ -2,\ -2)$，C$(5,\ 0,\ -1)$

別解　解答では，(ア) の選択肢 ⓪ の条件を用いて，p，a，b，c を求めたが，選択肢 ① の条件を用いて求めることもできる．

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ から　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$

よって　$(2-p)^2+(-3-p)^2+(-1-p)^2=(1-p)^2+(1-p)^2+(-2-p)^2$

整理すると　$4p+8=0$　　ゆえに　$p=-2$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(a+2,\ b+2,\ c+2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(3,\ 3,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ から　$a+2=7,\ b+2=2,\ c+2=1$

よって　　$a=5$，$b=0$，$c=-1$

(1)　$\vec{n}=(1,\ -l,\ -m)$ とおく．

$\overrightarrow{AB}=(4,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{AD}=(3,\ 3,\ 0)$ であるから，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より　　$4+l-m=0$　……③

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ より　　$3-3l=0$　……④

③，④ から　　$l=1$，$m=5$　　よって　　$\vec{n}=(1,\ -1,\ -5)$

$\overrightarrow{AP}=(x+2,\ y+2,\ z+2)$ であるから，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ より　$x+2-(y+2)-5(z+2)=0$

ゆえに　　$x-y-5z=10$　……(*)

(2)　$\overrightarrow{EH}/\!/\vec{n}$ より，実数 k を用いて $\overrightarrow{EH}=k\vec{n}$ と表すことができるから

$$(x'-4,\ y'+3,\ z'+6)=(k,\ -k,\ -5k)$$

よって　　$x'=k+4$，$y'=-k-3$，$z'=-5k-6$

ここで，点 H は平面 ABC 上の点であるから，(*) より

$$k+4-(-k-3)-5(-5k-6)=10\qquad \text{整理すると}\qquad 27k+27=0$$

ゆえに　　$k=-1$

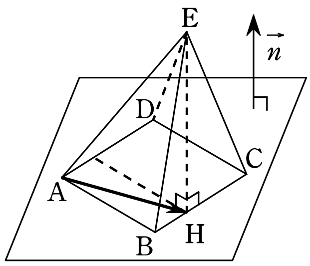
このとき H$(3,\ -2,\ -1)$ であるから　　$\overrightarrow{AH}=(5,\ 0,\ 1)$

$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}$ (s，t は実数) とおくと　　$(5,\ 0,\ 1)=s(4,\ -1,\ 1)+t(3,\ 3,\ 0)$

ゆえに　　$5=4s+3t$，$0=-s+3t$，$1=s$　　これを解くと　$s=1$，$t=\dfrac{1}{3}$

よって，$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$（②）であるから，点 H は

ひし形 ABCD の辺 BC 上にある．（①）



また，四角錐 E−ABCD において，ひし形 ABCD を底面

とみると，高さは EH である．

ここで，$\overrightarrow{AC}=(7,\ 2,\ 1)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,\ 4,\ -1)$ であるから

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{7^2+2^2+1^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6},$$

$$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

ゆえに，ひし形 ABCDの面積は　　$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|=\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{6}\cdot3\sqrt{2}=9\sqrt{3}$

$\overrightarrow{EH}=(-1,\ 1,\ 5)$ であるから　　$|\overrightarrow{EH}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+5^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

したがって，四角錐 E−ABCDの体積は　　$\dfrac{1}{3}\cdot9\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}=27$

9. (1)　点 H が平面 OBC 上にあるから

$$\overrightarrow{OH}=s\vec{b}+t\vec{c}\quad(\text{ただし，}s,\ t\ \text{は実数})\quad\cdots\cdots(\text{a})\quad(⓪)$$

と表すことができる．

また，直線 AH と平面 OBC が垂直であるから　　AH⊥OB　かつ　AH⊥OC

ゆえに　　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$　かつ　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}-\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ であるから

$$(\overrightarrow{OH}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0\ \text{かつ}\ (\overrightarrow{OH}-\vec{a})\cdot\vec{c}=0\quad\cdots\cdots(\text{b})\quad(②)$$

(a)，(b) から　　$(-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{b}=0$，$(-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{c}=0$

よって　$-\vec{a}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，$-\vec{a}\cdot\vec{c}+s\vec{b}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2=0$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=3$ から

$-2+4s+3t=0$，$-3+3s+9t=0$　これを解くと　$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{2}{9}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=-\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2=\left|-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right|^2=|\vec{a}|^2+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2+\frac{4}{81}|\vec{c}|^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{27}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{4}{9}\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=2^2+\frac{1}{9}\cdot2^2+\frac{4}{81}\cdot3^2-\frac{2}{3}\cdot2+\frac{4}{27}\cdot3-\frac{4}{9}\cdot3=\frac{8}{3}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|>0$ から　$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{\dfrac{8}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

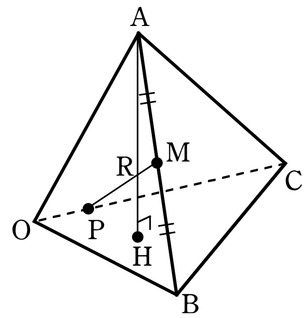
次に，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BOC}$ から　$\cos\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\dfrac{3}{2\cdot3}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<\angle\mathrm{BOC}<180^\circ$ から　$\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$

よって　$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}|\vec{b}||\vec{c}|\sin60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

したがって，四面体 OABC の体積は　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}$

(2)　(1) から　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}$



点 R は線分 AH 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-l)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+l\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-l)\vec{a}+l\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right)$$

$$=(1-l)\vec{a}+\frac{1}{3}l\vec{b}+\frac{2}{9}l\vec{c}\ \ (l\text{ は実数})\quad\cdots\cdots(\mathrm{c})$$

また，点 R は線分 PM 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-m)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+m\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-m)k\vec{c}+\frac{1}{2}m(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}m\vec{a}+\frac{1}{2}m\vec{b}+(1-m)k\vec{c}\quad\cdots\cdots(\mathrm{d})$$

4 点 O，A，B，C が同じ平面上にない（③）から，(c)，(d) の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数を比較して　$1-l=\dfrac{1}{2}m$，$\dfrac{1}{3}l=\dfrac{1}{2}m$，$\dfrac{2}{9}l=(1-m)k$

これを解くと　$k=\dfrac{1}{3}$，$l=\dfrac{3}{4}$，$m=\dfrac{1}{2}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\dfrac{1}{2}(|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2)-\dfrac{1}{3}(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})-\frac{1}{3}|\vec{c}|^2$$

$$=\frac{1}{2}(3+3)-\frac{1}{3}\cdot3^2=0$$

参考　$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ および $\overrightarrow{PM}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OC}\neq\vec{0}$ から

$$PM\perp AB,\ PM\perp OC$$

したがって，このとき，線分 PM の長さは最小になる．

$\Im\int\hbar\, i^2$
(S20−M2727)