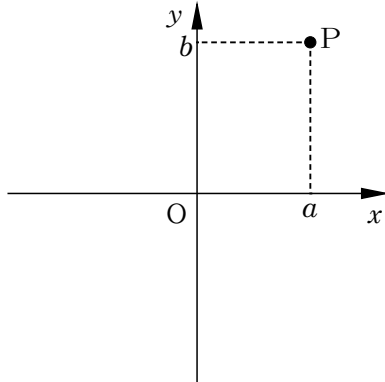


# まとめ 平面ベクトルと空間ベクトル

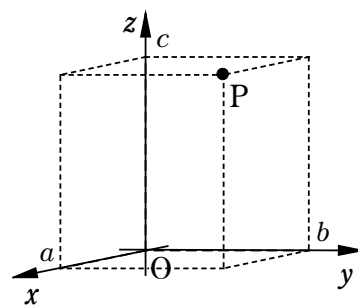
## 1 座標

### 1. 座標平面



$P(a, b)$   
 $a$  :  $x$ 座標  
 $b$  :  $y$ 座標

### 1. 座標空間



$P(a, b, c)$   
 $a$  :  $x$ 座標  
 $b$  :  $y$ 座標  
 $c$  :  $z$ 座標

### 2. 点の対称移動

点  $P(a, b)$  と次のものに関して対称な点は、  
以下のようにになる。

$x$  軸 :  $Q(a, -b)$

$y$  軸 :  $R(-a, b)$

原点 :  $W(-a, -b)$

点  $P(a, b, c)$  と次のものに関して対称な  
点は、以下のようにになる。

$x$  軸 :  $Q(a, -b, -c)$

$y$  軸 :  $R(-a, b, -c)$

$z$  軸 :  $S(-a, -b, c)$

$xy$  平面 :  $T(a, b, -c)$

$yz$  平面 :  $U(-a, b, c)$

$zx$  平面 :  $V(a, -b, c)$

原点 :  $W(-a, -b, -c)$

### 3. 2点間の距離

点  $O(0, 0)$ ,  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$   
に対して、

$$OA = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

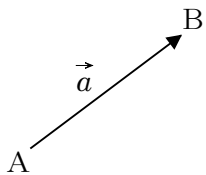
点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  
 $B(b_1, b_2, b_3)$  に対して、

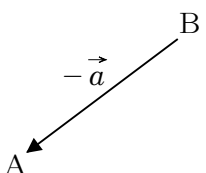
$$OA = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

## 2 ベクトルと成分

### 1. 用語・表記


 ベクトル：位置の違いを無視して，向きと大きさだけに着目したもの  
 表記： $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$       大きさ： $|\overrightarrow{AB}|$ ,  $|\vec{a}|$


 逆ベクトル：大きさが等しく，向きが反対のベクトル  
 $\overrightarrow{AB}$ の逆ベクトル： $\overrightarrow{BA}$ ,  $-\overrightarrow{AB}$ ,  $-\vec{a}$

### 2. 成分

(1)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  のとき

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

(2)  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  のとき

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

(1)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  のとき

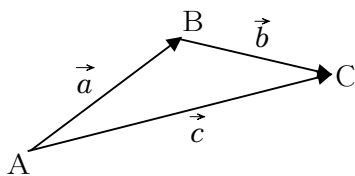
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

(2)  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3)$  のとき

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

### 3. 加法



ベクトルの加法を左図のように定める.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

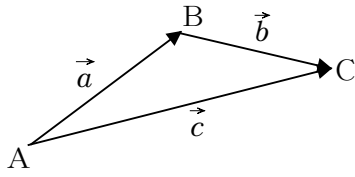
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  のとき

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  のとき

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

#### 4. 減法



ベクトルの減法を左図のように定める.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{BC} \\ \vec{b} &= \vec{c} - \vec{a}\end{aligned}$$

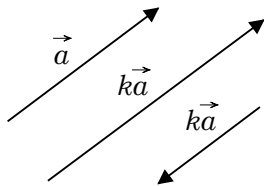
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$\vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$\vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

#### 5. 実数倍



ベクトル  $\vec{a}$  の実数倍  $k\vec{a}$  を次のように定める.

$k > 0$  のとき:  $\vec{a}$  と同じ向きで大きさが  $k$  倍

$k < 0$  のとき:  $\vec{a}$  と反対向きで大きさが  $k$  倍

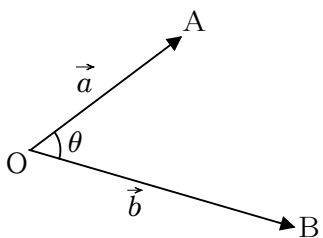
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad k : \text{実数のとき}$$

$$k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad k : \text{実数のとき}$$

$$k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

### 3 ベクトルの内積



ベクトルの内積を左図のもと、次のように定める.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

ベクトルのなす角を求めるときには、次の形で使う.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

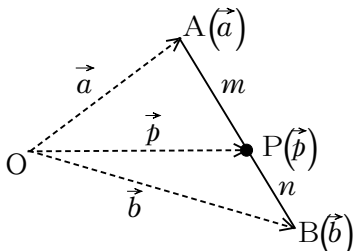
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

## 4 位置ベクトル

### 1. 内分点



点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  に対して, 線分  $AB$  を  $m:n$  に内分する点を  $P(\vec{p})$  とすると

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

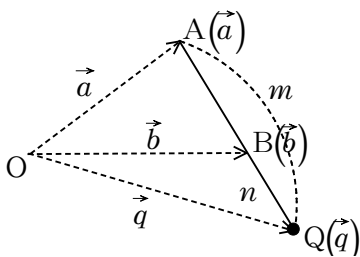
$A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  のとき

$$P\left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n}\right)$$

$A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3)$  のとき

$$P\left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n}, \frac{na_3 + mb_3}{m+n}\right)$$

### 2. 外分点



点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  に対して, 線分  $AB$  を  $m:n$  に外分する点を  $Q(\vec{q})$  とすると

$$\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

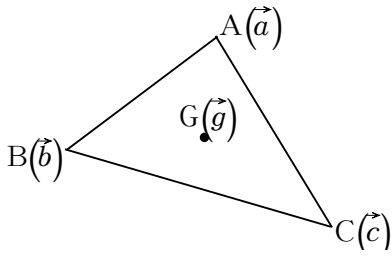
$A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  のとき

$$Q\left(\frac{-na_1 + mb_1}{m-n}, \frac{-na_2 + mb_2}{m-n}\right)$$

$A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3)$  のとき

$$Q\left(\frac{-na_1 + mb_1}{m-n}, \frac{-na_2 + mb_2}{m-n}, \frac{-na_3 + mb_3}{m-n}\right)$$

### 3. 三角形の重心



点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$ ,  $C(\vec{c})$  に対して, 三角形  $ABC$  の重心を  $G(\vec{g})$  とすると

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$ ,  $C(c_1, c_2)$   
のとき

$$G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$$

$A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3)$ ,  
 $C(c_1, c_2, c_3)$  のとき

$$G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}, \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}\right)$$

## 5 ベクトルの 1 次結合

### 1. 1 次独立

$\vec{a} \neq 0$ ,  $\vec{b} \neq 0$ ,  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$  のとき

$$s\vec{a} + t\vec{b} = s'\vec{a} + t'\vec{b}$$

$$\iff s = s', t = t'$$

$\vec{a} \neq 0$ ,  $\vec{b} \neq 0$ ,  $\vec{c} \neq 0$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  が同一平面上にないとき

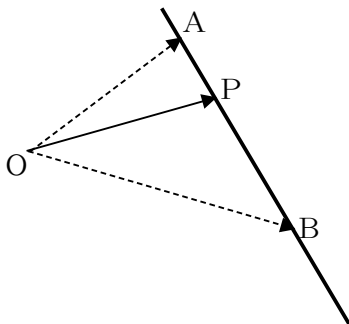
$$s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = s'\vec{a} + t'\vec{b} + u'\vec{c}$$

$$\iff s = s', t = t', u = u'$$

### 2. 点の存在範囲

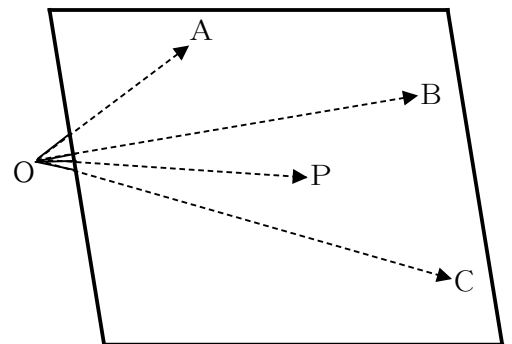
$$\begin{cases} \vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} \\ s+t=1 \end{cases} \text{ のとき}$$

点  $P$  は直線  $AB$  上に存在



$$\begin{cases} \vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} + u\vec{OC} \\ s+t+u=1 \end{cases} \text{ のとき}$$

点  $P$  は平面  $ABC$  上に存在



**6** ベクトルで表す条件

1. 共線条件 3点 A, B, C が同一直線上に存在  $\iff \overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$  となる実数  $k$  が存在

2. 垂直条件 線分 AB, CD が垂直  $\iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$