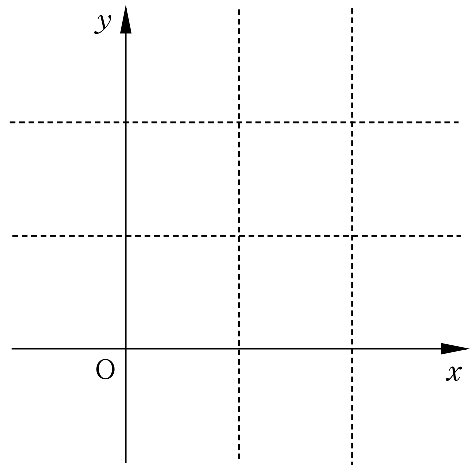
# 研究　ベクトルと座標系

## 1　座標再考

中学校から使っている $x$ 軸と $y$ 軸による座標の設定の仕方を，**正規直交座標系**という．ここでは，この座標系をベクトルの視点から見直してみよう．

いま，$E_1(1,0)$，$E_2(0,1)$とすると，

$$\overrightarrow{OE_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{OE_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$




となる．この 2 つのベクトルを**基本ベクトル（基底）**という．$\overrightarrow{OP}$を基本ベクトルを使って表すと，

$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\overrightarrow{OE_1}+y\overrightarrow{OE_2}$$

となる．このことより，点 P の座標が$(x,y)$であることは，ベクトルを用いると次のように述べることができる．

点 P の座標とは，$\overrightarrow{OP}$を基本ベクトル$\overrightarrow{OE_1}$，$\overrightarrow{OE_2}$の 1 次結合で表したときの**係数**である．

例　点 Q の座標が$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$であるとは，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OE_1}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OE_2}$と表せることである．

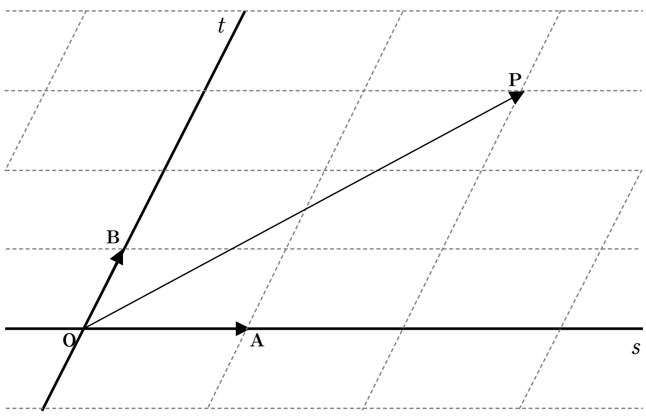
参考　次の式を満たす点$P(x,y)$の存在範囲を上図の座標平面に図示せよ．

$$x+y=2,\quad x\geqq 0,\quad y\geqq 0$$

## 2　斜交座標系

正規直交座標系では，2 つの基本ベクトルが直交し，（矢線の）長さが等しかった．しかし，必ずしも基本ベクトルが，直交して長さが等しくなくてもよい．

例えば，なす角が90°ではなく，長さも等しくない 2 つのベクトル$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$を基本ベクトルとした場合，右図のような座標の設定をすることができる．このような座標の設定の仕方を**斜交座標系**という．




例　右図において，

$$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$$

となるので点 P の座標は$(2,3)$である．

一般に，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるとき，点Pの座標は$(s\,,\,t)$となる．特に，$(1\,,\,0)$，$(0\,,\,1)$のとき，それぞれ点A，Bとなるので，2つの基本ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$の成分は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

となる．いま，2点A，Bを通る直線の方程式を斜交座標系で求めてみよう．直線上の任意の点を$\mathrm{P}(s\,,\,t)$とすると，直線のベクトル方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となるので，成分で表し，媒介変数を消去すると

$$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=(1-k)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k\\k\end{pmatrix}\Longleftrightarrow s+t=1$$

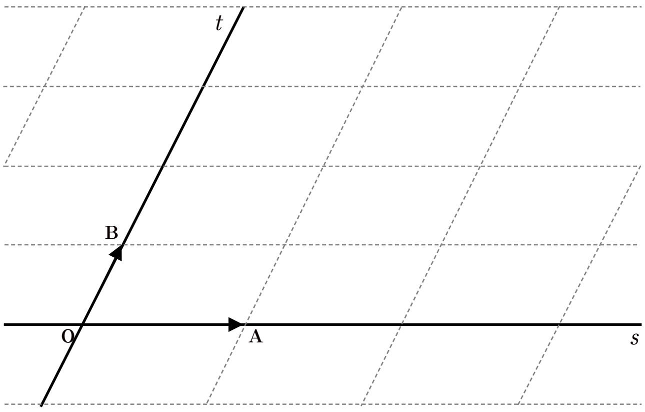
このことから，斜交座標系においても，直線は1次式で表されることが分かる．

例　斜交座標系において，方程式$s+2t=2$で表される図形は，2点$(2\,,\,0)$，$(0\,,\,1)$を通る直線である．

**例題❶**　次の式を満たす点$\mathrm{P}(s\,,\,t)$の存在範囲を右図の斜交座標系による座標平面に図示せよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

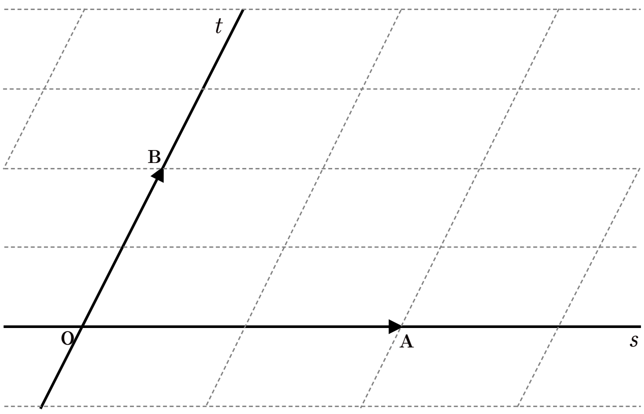
$$s+t=2,\quad s\geqq 0,\quad t\geqq 0$$




**問題②**　次の式を満たす点$\mathrm{P}(s\,,\,t)$の存在範囲を右図の斜交座標系による座標平面に図示せよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$s+t=\frac{1}{2},\quad s\geqq 0,\quad t\geqq 0$$

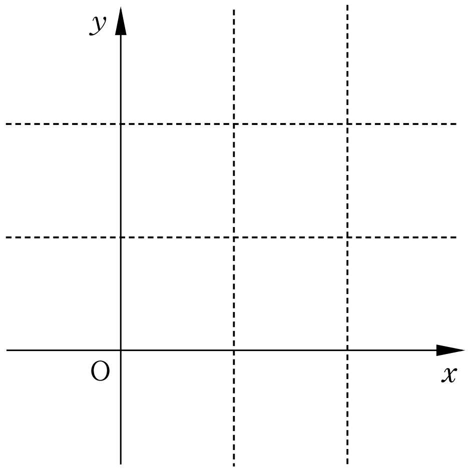


## 3　領域

斜交座標系においても正規直交座標系の場合と同様に不等式の表す領域を考えることができる.

問題③　次の式を満たす点P($x$, $y$)の存在範囲を右図の座標平面に図示せよ.

$$0 \leqq x+y \leqq 1,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$



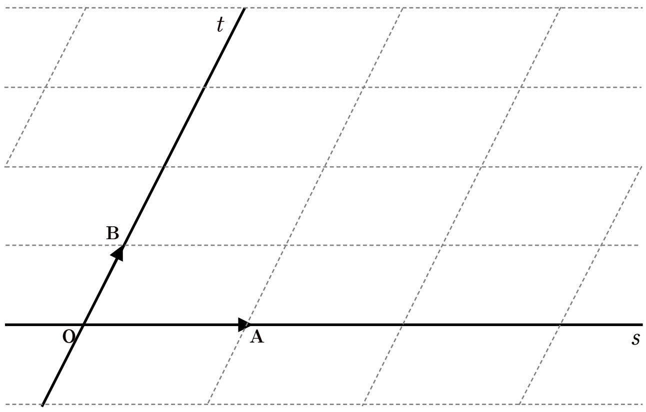

問題③で領域を求めた考え方を使って次の 例題❷を考えてみよう.

例題❷　次の式を満たす点P($s$, $t$)の存在範囲を右図の斜交座標系による座標平面に図示せよ.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$0 \leqq s+t \leqq 1,$$

$$s \geqq 0,\quad t \geqq 0$$

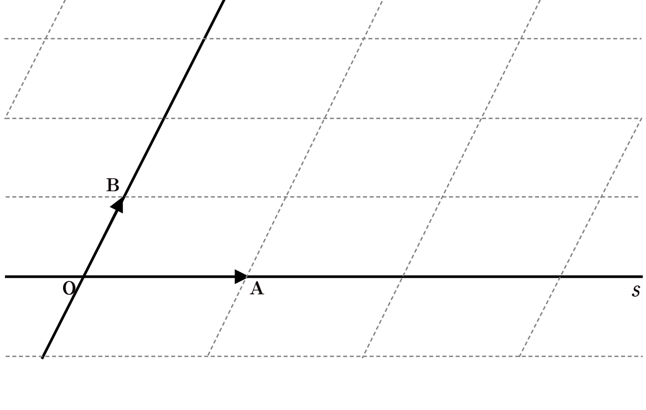



問題③　次の式を満たす点P($s$, $t$)の存在範囲を右図の斜交座標系による座標平面に図示せよ.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$0 \leqq s+t \leqq 3,$$

$$s \geqq 0,\quad t \geqq 0$$



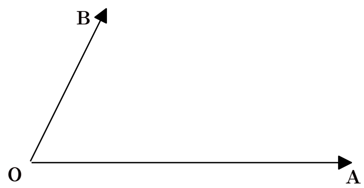
## 4　存在範囲の図示

点 P の存在範囲を求めるには，斜交座標系を利用すれば正規直交座標系の場合と同様に求めることができる．教科書のような問題の場合でも，存在範囲を図示することができれば考えやすくなる．

例題❸　△OAB に対し，次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ．

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB},\quad 1\leqq s\leqq 2,\quad 0\leqq t\leqq 1$$

解




問題④　△OAB に対し，次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ．

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB},\quad 1\leqq s+t\leqq 2,\quad s\geqq 0,\quad t\geqq 0$$