0 ストラテジー (Strategy)

1 ストラテジーとは何か？

数学の公式や定理，数学的テクニックを暗記するだけで，すべての問題が「機械的」に解ける，ということはあり得ない．そのことは，十分経験済みだろう．解法がアルゴリズム化されていない問題が多数だからである[1]．

しかし，数学者は解法がアルゴリズム化されていない問題（ノンルーチンな問題）を解決するために研究をし，そのような問題を解決している．彼らの問題解決過程を観察・分析をすると，ちょっとしたコツや経験則を見出すことができる．問題解決の素人には見出されない，エキスパートならではのものである．このようなコツや経験則をまとめておけば，問題解決においてどのように考えればよいか考えればよいか分からないとき，考える方略を与えてくれるだろう．この方略のことを『ストラテジー』という．

2 どのようなストラテジーがあるのか？

ストラテジーを利用してノンルーチンな問題に対して取り組み, 考えることができれば, それは効果的なものとなるだろう．ただ，ストラテジーが数百個，数千個というものになってしまうならば，非実用的である．しかし，高等学校の数学に限定して考えれば，ストラテジーは 14 個にまとめることができることが塚原[2]によって分かっている．

本講座では，その 14 個のうちよく使われる 10 個について，実際に問題を解きながら説明をしていく．その 10 個とは以下のものである．

1. 類推 (Analogy)
2. 逆向きにたどる (Work backwards)
3. 定義に戻る (Go back to definition)
4. 再形式化 (Reformation)
5. 間接証明 (Indirect proof)
6. 変数を少なくする (Fewer variables)
7. シンメトリー (Symmetry)
8. 論理的推論 (Logical reasoning)
9. 特殊化・一般化 (Specialization・Generalization)
10. 帰納的思考 (Inductive thinking)

---

[1] 解法がアルゴリズム化されていない問題が本当の意味での『**問題**』なのだが・・・．

❸ ストラテジーによる問題解決

実際に，ストラテジーを利用した問題解決を説明しよう．この問題で利用するストラテジーは『類推』である[2)].

問題　四面体 ABCD において，1 つの頂点とその頂点と向かいあった三角形の重心とを結んでできる 4 本の線分が 1 点で交わることを証明せよ．

参考文献

[1] G. Polya 著，柿内賢信 訳『いかにして問題をとくか』，丸善，1975 年.

[2] 塚原成夫 著，『数学的思考の構造－発見的問題解決ストラテジー－』，現代数学社，2000 年.

[3] 塚原成夫 著，『新・高校数学による発見的問題解決法－ストラテジー入門－』，現代数学社，2004 年.

2) 『類推』についての詳細は次回の授業で扱う．

年　　組　　番　氏名

$\boxed{1}$ 類推 (Analogy)

与えられた問題と似た他の分野の考え方から問題の解法を発見するストラテジーが『類推』というストラテジーである．特に空間図形の問題で有用であり，頻繁に利用される．

$\boxed{問題}$① 空間に 2 定点 A$(2, 2, 0)$，B$(0, 0, 2)$をとる．三角形 PAB が正三角形となるような点 P のつくる空間曲線を C とする．曲線 C の xy 平面への正射影 C' の方程式を求めよ．

$\boxed{考え方}$

参考
空間における平面の方程式は
$$ax + by + cz = d$$

問 題②　球Sは中心座標がすべて正で，xy平面，yz平面，zx平面に接する半径 1 の球とする．点P$(x\,,\,y\,,\,z)$が球S上を動くとき，$6x+3y+2z$のとりうる値の範囲を求めよ．

考え方

参 考

点$(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$から平面$ax+by+cz=d$への距離は

$$\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0-d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

年　　組　　番　氏名

$\boxed{2}$ 逆向きにたどる (Work backwards)

結論から逆向きにたどる目標分析の考え方を『逆向きにたどる』ストラテジーという．

数学的な考え方の特徴の１つとして，「目標を指向しての思考」という点をあげられる．結論を得るにはどういう式を証明したらよいか，またその式を証明するにはどういう式を証明したらよいか,・・・と同様の議論をくり返して最終的に仮定や条件に結びつけようとするこのストラテジーは，上述の特徴を具体化するものといえる．

このストラテジーは，特に証明問題において有用であり，頻繁に利用される．

問題① 1 と $\dfrac{2}{3}\log_2 3$ との大小を決定せよ．

考え方

問題②　n 人の選手 P_1，P_2，P_3，…，P_n が総当たり戦で試合をする．各選手は他のどの選手ともちょうど 1 回対戦し，どの対戦においても引き分けはないものとする．選手 P_i の勝ち試合数を W_i，負け試合数を L_i とするとき，次の式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{i=1}^{n} {W_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} {L_i}^2$$

考え方

年　　組　　番　氏名

問題③　中心が O である定円の円周上に相異なる 6 つの定点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 がある．このとき，6 点のうちから 3 点を任意に選ぶ．選んだ 3 点を頂点とする三角形の垂心と残りの 3 点を頂点とする三角形の重心とを通る直線は，3 点の選び方に無関係な定点を通ることを証明せよ．

考え方

参考
三角形 ABC の外心を O, 垂心を H とするとき,

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$\boxed{\text{問 題}}$④　サイコロを１回または２回または３回振り，最後に振って出た目の数を得点とするゲームを考える．１回振って出た目を見た上で，２回目を振るか否かを決められる．また，２回目を振った場合は，２回目に出た目を見た上で，３回目を振るか否かを決められるものとする．２回目，３回目を振るか否かの決定は，どのようにするのが有利か．

$\boxed{\text{考え方}}$

年　　組　　番　氏名

3 定義に戻る (Go back to definition)

数学の特徴の１つとして，公理そして定義を出発点にした演繹的論理体系であるという点があげられる．『定義に戻る』というストラテジーは，以上の数学の特徴を踏まえて，どう考えたらよいか途方に暮れたときに，「議論の出発点に戻り，そこから考え直す」ことが役に立つことを教えるものである．さらに，このことは数学にとどまらず，あらゆる議論に共通して有効な考え方といえるだろう．

問題① 関数 $f(x)$ が，

$$f(x+y)=f(x)\sqrt{1+\{f(y)\}^2}+f(y)\sqrt{1+\{f(x)\}^2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

を満たすとき，$f(x)$ の導関数が存在することを示せ．

考え方

参考
関数 $f(x)$ の導関数の定義は，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

問 題 ② (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $\sin 1$ の大小を比較せよ.

(2) $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, $\sin 4$ の大小関係を決定せよ.

考え方

年　　組　　番　氏名

問 題 ③　次の関数は周期関数であるか否かを，理由をつけて答えよ．また，周期関数である場合には，その周期を求めよ．

(1)　$f(x)=\sin(\sin x)$

(2)　$f(x)=\cos(\sin x)$

考え方

参考

$f(x+c)=f(x)$ がすべての x について成り立つとき，関数 $f(x)$ は**周期関数**であるという．

$f(x+c)=f(x)$ を満たす最小の $c>0$ を関数 $f(x)$ の**周期**という．

年　　組　　番　氏名

$\boxed{4}$ 再形式化 (Reformation)

問題が複雑で取り扱いにくいとき，原問題を次から次へとより扱いやすい問題へ「生産的改造」をして解こうとする考え方を『再形式化』という．

このような考え方は別に目新しいものではなく，教科書の例題レベルの問題においても利用されている考え方である．

問題① 方程式 $x^3 - 3x^2 - a = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつための a の条件を求めよ．

考え方

問 題②　n個の正の数a_1，a_2，a_3，…，a_nがある．

$$A=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n,\quad B=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

とおくとき，A，Bの少なくとも1つはn以上であることを証明せよ．ただし，$n\geqq 2$とする．

考え方

年　　組　　番　氏名

問 題 ③　実数 a，x，y，z に対して，次の各問いに答えよ．

(1)　$x+y+z=a$，$x^3+y^3+z^3=a^3$ が成り立つとき，x，y，z の少なくとも 1 つは a に等しいことを証明せよ．

(2)　$x+y+z=3a$，$xy+yz+zx=3a^2$ が成り立つとき，x，y，z のすべてが a に等しいことを証明せよ．

考え方

問 題 ④　$x \geqq y \geqq 0$ なるすべての実数 x，y に対して，$ax+by \geqq 0$ となるための実数 a，b の満たす条件を求めよ．

考え方

年　　組　　番　氏名

$\boxed{5}$ 間接証明 (Indirect proof)

問題解決においては，直接的に攻略（直接証明）しようとしてもうまくいかない場合，迂回して違った方向から攻略するという柔軟な発想が要求される．その１つの方略が,『間接証明』のストラテジーである．

高等学校の数学にでは，具体的に『対偶による証明』と『背理法』ということになる．

問題① 関数 $f(x)=3x^2+2ax+b$ において，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|dx<2$ が成り立つとき，$f(x)=0$ は相異なる実数解をもつことを示せ．

考え方

参考

問題② a，b，c を任意の実数とし，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする．

(1) a，b，c によらず，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ の間に成り立つ等式を求めよ．

(2) $\left|f(1)\right|$，$\left|f(2)\right|$，$\left|f(3)\right|$，$\left|f(4)\right|$ のうち少なくとも１つは $\dfrac{3}{4}$ 以上であることを証明せよ．

考え方

問題③　$f(x)=x^4-3x^3+(a+2)x^2-2ax$ とする．$f(x)<0$ のとき，$x(x-2)>0$ となるように定数 a の値の範囲を定めよ．

考え方

参考

年　　組　　番　氏名

6 変数を少なくする (Fewer variables)

変数が多くて考えにくい問題では，変数の少ない問題にすりかえることでアプローチの方法を見いだせる場合がある．この方略を『変数を少なくする』ストラテジーという．

このストラテジーには，変数の少ない問題にすりかえて『類推する』という意味合いと，文字通り『変数を消去』していくことで解答へといたるという意味合いの 2 つが含まれている．

問 題① $p>0$，$q>0$，$r>0$，$s>0$ のとき，

$$\frac{(p^2+1)(q^2+1)(r^2+1)(s^2+1)}{pqrs} \geqq 16$$

を証明せよ．

考え方

参 考

問 題② 実数 a，b，c について，$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=\dfrac{1}{3}$ の関係があるとき，a，b，c の値を求めよ．

考え方

問 題③　$x+y+z=3a$，$xy+yz+zx=3a^2$ が成り立つとき，x，y，z のすべてが a に等しいことを証明せよ．

考え方

参 考

問 題④　$0<a<1$，$0<b<1$，$0<c<1$，$0<d<1$ のとき，

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)>1-a-b-c-d$$

を証明せよ．

考え方

年　　組　　番　氏名

$\boxed{7}$ シンメトリー (Symmetry)

シンメトリーは，一般的に「対称性」と訳される．このことばからは図形に関する対称性を連想しがちであるが，変数（文字）や論理に関する対称性というものも考えることができる．例えば，対称式は変数に関して対称性をもつ式である．

この対称性を意識して使ってみようというものが『シンメトリー』というストラテジーである．

問 題① A$(0, 0, 6)$，B$(0, 0, 20)$とする．xy平面上の点P$(x, y, 0)$で，$\angle APB \geqq 30°$を満たすものの全体がつくる図形の面積を求めよ．

考え方

参 考

問 題② 三角形ABCにおいて，$\tan A$，$\tan B$，$\tan C$の値がすべて整数であるとき，それらの値を求めよ．

考え方

$\boxed{\text{問 題}}$③　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$を満たす自然数$a$，$b$，$c$を求めよ．

$\boxed{\text{考え方}}$

$\boxed{\text{問 題}}$④　実数a，b，cについて，$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=\dfrac{1}{3}$の関係があるとき，a，b，cの値を求めよ．

$\boxed{\text{考え方}}$

✐**注**．対称性がくずれている場合は，$\boxed{\text{問 題}}$④の$\boxed{\text{考え方}}$を使うことはできない．

参 考　縦x，横y，高さzの長さの和がaで，表面積が$\dfrac{a^2}{2}$となると直方体の体積をVとする．このとき，Vの最大値を求めよ．

年　　組　　番　氏名

$\boxed{8}$ 論理的推論 (Logical reasoning)

数学において論理とは何だろうか．様々な答えが考えられるだろうが，ここでは「数学において会話をする」ときに使う文法が論理である，としておこう．

ここで，『論理的推論』のストラテジーとは，論理規則にしたがって形式的に処理をするという考え方と，背理法や対偶証明法などの数学的論法によって考える，という 2 つの意味合いが含まれている．

問題①　a，b を実数とする．また，条件 A を

A ：任意の実数 x に対して，適当な実数 y をとれば，$ax=by$ となる

とする．次の (1) から (3) は，条件 A が成り立たないための必要条件であるか十分条件であるかを答えよ．

(1)　どのような実数 x をとっても，任意の実数 y に対して，$ax=by$ となる．

(2)　適当な実数 x をとれば，任意の実数 y に対して，$ax=by$ となる．

(3)　適当な実数 x をとれば，適当な実数 y に対して，$ax=by$ となる．

参考

考え方

問題②　1 辺の長さが 2 である正方形の内部に 5 つの点があるとする．このとき，2 点間の距離が $\sqrt{2}$ 以下になる 2 点が必ず存在することを証明せよ．

参考

考え方

問題③　互いにことなるn個($n \geqq 3$)の正の数の集合$S=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$は性質

「Sから相異なる要素a_i，a_jをとれば，a_i-a_jまたはa_j-a_iの一方が必ずSに属する」

をもつという．このとき，$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n$の順序を適当に変えれば等差数列になることを示せ．

考え方

問題④　方程式$x^3-3x+1=0$の解をa，b，cとする．次の問いに答えよ．

(1)　a，b，cは相異なる実数であることを証明せよ．また，$|a|$，$|b|$，$|c|$の中には$\sqrt{3}$より大きいものがあることを示せ．

(2)　$a<b<c$とするとき，等式$a^2=c+2$，$b^2=a+2$，$c^2=b+2$が成り立つことを証明せよ．

考え方

年　　組　　番　氏名

$\boxed{9}$ 特殊化・一般化 (Specialization・Generalization)

一般的性格を有する問題では「特別な場合」をヒントにすることで，解決へ向かっての方向性を得ることができる．この考え方を『特殊化』のストラテジーという．

$\boxed{\text{問 題}}$① 一辺の長さ 1 正方形が 2 つある．いま，一方の正方形の頂点が他方の正方形の中心に位置しているものとする．2 つの正方形の共通部分の面積のとり得る値を求めよ．

$\boxed{\text{考え方}}$

$\boxed{\text{問 題}}$② $0<a<1$，$0<b<1$，$0<c<1$のとき，3 つの数

$$A=abc+2,\quad B=\frac{1}{2}(bc+ca+ab+3),\quad C=a+b+c$$

の大小を比較せよ．

$\boxed{\text{考え方}}$

文字式の中の未知定数を変数とみなして，文字式を関数としてとらえるというように対象を抽象化していく考え方を『一般化』のストラテジーという．具体から抽象へという流れが，数学の特徴の 1 つである．このストラテジーは，数学という学問の性格を表しているものといえる．

$\boxed{\text{問 題}}$③　$|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$のとき，$abc+2>a+b+c$を証明せよ．

$\boxed{\text{考え方}}$

年　　組　　番　氏名

10 帰納的思考 (Inductive thinking)

「帰納的操作 → パターン発見 → 数学的帰納法による証明」という一連の流れで考える方略を『帰納的思考』のストラテジーという.

いろいろなテクニックなどを使おうと試行錯誤するよりも，帰納的な思考をすることで「発見的」に問題解決をすることができる.

問題① $a_1=3$，$a_n{}^2=(n+1)a_{n+1}+1 \quad (n \geqq 1)$ のとき，一般項 a_n を求めよ.

考え方

問題② b を 0 でない定数とし，次の漸化式で定義される数列の一般項 a_n を求めよ.

$$a_0=1,\quad a_1=b,\quad (n+1)a_{n+1}+ba_{n-1}=(n+b)a_n \quad (n \geqq 1)$$

考え方

$\boxed{\text{問 題}}$③　整数 $a_n = 19^n + (-1)^{n-1} \cdot 2^{4n-3}$ $(n \geqq 1)$ のすべてを割り切る素数を求めよ．

$\boxed{\text{考え方}}$

$\boxed{\text{問 題}}$④　1 以上の整数全体の集合を S とする．集合 $\{3m+7n \mid m,\ n \in S\}$ を考えると，それはある整数 k 以上のすべての整数を含むことを示せ．また，このような k の最小値を求めよ．

$\boxed{\text{考え方}}$

年　　組　　番　氏名