

1 命題と条件

1 命題って何？

次の文，式のうち，正しいものには ○，正しくないものには ×，正しいとも正しくないともいえないものには △ を に記入せよ。

(1) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$

ア

(2) $\sqrt{(-3)^2} = -3$

イ

(3) 100 は大きな数である。

エ

(4) $x=1$ ならば $x^2=1$

オ

(5) $x^2=1$ ならば $x=1$

カ

(6) $x^2 > 1$ ならば $x > 1$

キ

(7) $x > 1$ ならば $x^2 > 1$

ク

正しいか，正しくないかがはっきり決まる事柄を表す文や式を という。ある命題が正しいとき，その命題は「 である」といい，正しくないとき，「 である」という。

命題の中には，上の (5) ~ (8) のように2つの条件 p ， q について

p ならば q

という形で述べられるものもある。このとき， p を ， q を という。

また，この命題を次のように表す。

p q

2 行きはよいよい、帰りはこわい・・・

次の命題は正しいだろうか、真のものには ○、偽のものには × を ① に記入せよ。また、 \Rightarrow を逆にした命題についても ② に ○、× を記入せよ。

(1) $5x = 15 \Rightarrow x = 3$

 ① ②

(2) $x^2 = 2x \Rightarrow x = 2$

 ① ②

(3) $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$

 ① ②

(4) $x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$

 ① ②

(5) $x > 1$ かつ $y > 1 \Rightarrow x + y > 1$

 ① ②

(6) $x = 1$ または $y = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

 ① ②

(7) x は 6 の倍数 $\Rightarrow x$ は 3 の倍数

 ① ②

(8) 自然数 n は素数 \Rightarrow 自然数 n は奇数

 ① ②

命題「 $p \Rightarrow q$ 」に対して、命題「 $q \Rightarrow p$ 」をもとの命題の という。

上の結果からも分かるように、命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真であっても命題「 $q \Rightarrow p$ 」が真であるとは限らない（逆は必ずしも真ならず）。

これに対して、命題「 $p \Rightarrow q$ 」と命題「 $q \Rightarrow p$ 」がともに真であるときがある。このようにとき、 p と q は といい、「 $p \Rightarrow q$ 」かつ「 $q \Rightarrow p$ 」を次のように表す。

$$p \quad \text{チ} \quad q$$

また、命題「 $p \Rightarrow q$ 」が偽であることを示すには「 p であるのに q でない」という例を 1 つあげればよい。この例を、その命題に対する という。

3 否定しなさい

条件 p に対して、「 p でない」という条件を p の といい、次のように表す。
 \bar{p}

次の条件を否定せよ。ただし、 n は整数、 x 、 y は実数とする。

(1) p : n は偶数である。

(2) p : n は奇数である。

(3) p : x は 5 以上である。

(4) p : $x < -2$

(5) p : $x \leq 5$ または $y > 8$

(6) p : $x \geq 1$ かつ $y \leq 4$

(7) p : $x \geq 2$

(8) p : $-1 < x < 2$

(9) p : 自然数 n は奇数である。

問題 ① 条件 p と条件 $\bar{\bar{p}}$ について、正しいものにマークせよ。

① 条件 p と条件 $\bar{\bar{p}}$ とは異なる

② 条件 p と条件 $\bar{\bar{p}}$ とは同じ

③ 条件 p と条件 $\bar{\bar{p}}$ とは同じこともあるし、異なることもある。

上の (5) と (6) から次のことが言える。

(i) 「かつ」を否定すると「」

(ii) 「または」を否定すると「」

これは一般に、次のような法則にまとめられる.

ド・モルガンの法則

$$(i) \overline{p \text{ かつ } q} \iff \bar{p} \text{ または } \bar{q}$$

$$(ii) \overline{p \text{ または } q} \iff \bar{p} \text{ かつ } \bar{q}$$

集合のド・モルガンの法則
を思い出そう!

問題 ② 次の条件の否定をつくれ.

(1) $x < 3$ かつ $x < 5$

(2) $x \leq 3$ または $x \leq 5$

4 裏

次の命題は「 $p \implies q$ 」の形をしている. これを「 $\bar{p} \implies \bar{q}$ 」の形にし, その真偽を答えよ.

	$p \implies q$	$\bar{p} \implies \bar{q}$	真偽
(1)	$x = 2 \implies x^2 = 4$		
(2)	$x > 2 \implies x^2 > 4$		
(3)	$x > 0 \implies x^2 > 0$		
(4)	$x = 0 \implies x^2 = 0$		
(5)	$x > 1$ かつ $y > 1 \implies x + y > 1$		
(6)	$x = 1$ または $y = 2 \implies x^2 - 3x + 2 = 0$		
(7)	n は 6 の約数 $\implies n$ は 12 の約数		

命題「 $p \implies q$ 」に対して, 命題「 $\bar{p} \implies \bar{q}$ 」をもとの命題の マ という. 上の結果からも分かるように, 命題「 $p \implies q$ 」が真であっても命題「 $\bar{p} \implies \bar{q}$ 」が真であるとは限らない

4 逆の裏

命題「 $p \Rightarrow q$ 」を逆にすると、「 $q \Rightarrow p$ 」である。さらに、これを裏にすると「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」となる。

次の命題は「 $p \Rightarrow q$ 」の形をしている。これを「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」の形にし、その真偽を答えよ。

	$p \Rightarrow q$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$	真偽
(1)	$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$		
(2)	$x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$		
(3)	$x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$		
(4)	$x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$		
(5)	$x > 1$ かつ $y > 1 \Rightarrow x + y > 1$		
(6)	$x = 1$ または $y = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$		
(7)	n は 6 の約数 $\Rightarrow n$ は 12 の約数		

命題「 $p \Rightarrow q$ 」に対して、命題「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」をもとの命題の という。

上の結果からも分かるように、命題「 $p \Rightarrow q$ 」の真偽は、命題「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」の真偽は一致する。

5 まとめてみると・・・

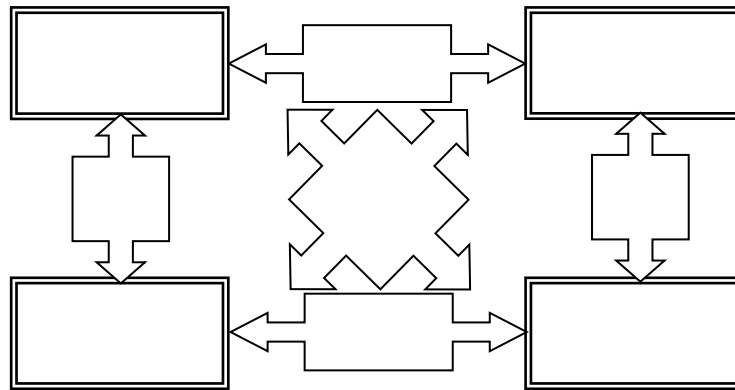
命題「 $p \Rightarrow q$ 」に対して、

命題の逆は

命題の裏は

命題の対偶は

となる。この4つの関係を図示すると次のようになる。



問題③ 次の命題の「逆」, 「裏」, 「対偶」を述べよ. また, その真偽を答えよ.

命題: $a < 1$ かつ $b < 1 \Rightarrow a + b < 2$

逆 : ()

裏 : ()

対偶 : ()

6 矢先は必要

2つの条件「 $p : x > 1$ 」, 「 $q : x > 0$ 」について, 次の命題の真偽を考えよう.

$p \Rightarrow q$ () $p \Leftarrow q$ ()

このとき,

「 $x > 1$ 」は「 $x > 0$ 」であるための であるという.

「 $x > 0$ 」は「 $x > 1$ 」であるための であるという.

次に, 2つの条件「 $p : 整数 a, b$ が同符号」, 「 $q : 整数 a, b$ の積が正」について, 次の命題の真偽を考えよう.

$p \Rightarrow q$ () $p \Leftarrow q$ ()

このとき,

「整数 a, b が同符号」は「整数 a, b の積が正」であるための であるという.

問題③ 次の条件 p と条件 q の間に成り立つ \Rightarrow , \Leftarrow , \Leftrightarrow を記入せよ. また, 空欄に「必要条件である」, 「十分条件である」, 「必要十分条件である」のいずれかを空欄に入れよ.

(1) $p : x < 3$ $q : -1 < x < 2$

q は p であるための

(2) $p : x = 6$ $q : x^2 = 36$

p は q であるための

(3) $p : \text{自然数 } n \text{ が偶数}$ $q : n = 4$

p は q であるための

(4) $p : \triangle ABC \text{ は } 3 \text{ 辺が等しい}$ $q : \triangle ABC \text{ の } 3 \text{ つの内角が等しい}$

q は p であるための

問題④ 次の条件 p と条件 q の場合はどうなるだろうか.

p : 自然数 n は 6 の倍数である.

q : 自然数 n は 2 の倍数である.

q は p の

p は q の

7 命題と集合

2つの条件「 p : 自然数 n は 6 の倍数である」, 「 q : 自然数 n は 2 の倍数である」について, $p \Rightarrow q$ は である. 条件 p を満たす集合を P , 条件 q を満たす集合を Q とすると,

P Q

2 論証

1 アリバイの原理

先生：「お前だろう！ 更衣室のガラスを割ったのは。」

生徒：「俺じゃないよ！ だって、昨日は学校サボったも～ん。」

さて、生徒の論理を分析してみよう。

p ：「俺が犯人である。」

q ：「当日、出席していた。」

とすると、

\bar{p} ：ア

\bar{q} ：イ

となる。したがって、生徒は「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」を考えて

ウ

と主張したのである。この主張によって、生徒の無実が証明された。

このように、「その時刻、犯行現場に居合わせなかったならば、その人は犯人ではありえない。」という考え方を「アリバイの原理」という。

2 対偶を利用しよう

日常生活でも何気なく使っている対偶を利用した証明方法を、数学の証明問題にも積極的に使ってみよう。

例題 2 次の命題を証明しよう。

$$n^2 \text{ が偶数} \Rightarrow n \text{ が奇数}$$

考え方 対偶を証明すればよい。

⇒注 命題「 $p \Rightarrow q$ 」の真偽は、その対偶「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」の真偽と一致する。

証明 この命題の対偶は

カ

となる。これを証明する。

終

問題⑥ 整数 n について, $n^2 + 1$ が偶数ならば, n は奇数であることを, 対偶を用いて証明せよ.

証明

終

3 $\sqrt{2}$ は無理数?

$\sqrt{2}$ が無理数だということは知っているだろう. そのように教科書に書いてあったから... 本当に無理数なのか? 証明をしてみよう.

例題③ 次の命題を証明しよう. $\sqrt{2}$ は無理数である.**考え方** 無理数ではないと仮定すると...

年 組 番 氏名

証明

終

「命題 P の結論 q 否定 \bar{q} を仮定すると矛盾が起きる」ということを利用して命題 P を証明する方法を という。

問題⑦ 次の命題を証明せよ。

$1+3\sqrt{2}$ は無理数である。

ただし、 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いてよい。

証明

終

問題⑧ a, b が有理数であるとき,

$$a + b\sqrt{2} = 0 \quad \text{ならば} \quad a = b = 0$$

であることを証明せよ. ただし, $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いてよい.

証明

終