証明についてあれこれ

石井　啓 *

1　$M_n = 2^n - 1$ となることの証明

$M_1 = 1$，$M_{n+1} = 2M_n + 1$ のとき，すべての自然数 n について，

$$M_n = 2^n - 1$$

となることを，**数学的帰納法**という証明法で証明をしておこう．この数学的帰納法は「ドミノ倒し論法」といわれることがある．自然数に関する証明では効果的な証明法である．詳細については，先生に聞いてみてもらいたい．

証明. 数学的帰納法で証明をする．

(ｉ) $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} M_1 &= 2^1 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり，成り立つ．

(ii) $n = k$ のとき，$M_n = 2^n - 1$ が成り立つと仮定すると，

$$M_k = 2^k - 1$$

となるので，

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= 2M_k + 1 \\ &= 2(2^k - 1) + 1 \\ &= 2 \times 2^k - 2 + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

となり，$M_n = 2^n - 1$ は $n = k + 1$ のときも成り立つ．

よって，(i)，(ii) より，すべての自然数 n について，

$$M_n = 2^n - 1$$

が成り立つ． □

* 東京都立狛江高等学校　教諭

2　素数が無数にあることの証明

プリントで，メルセンヌ素数の話題を取り上げたが，素数は無数に存在しており，その中の特殊なものがメルセンヌ素数である．この素数が無数にあるということは，紀元前にユークリッドによって証明されている．この証明は**背理法**という証明法で証明されている．その証明をここにあげておこう．背理法の詳細についても，先生に聞いてみてもらいたい[1]．

証明. 素数が有限個であると仮定する．

有限個の素数を

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_n$$

とおく．

いま，

$$P = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n + 1$$

という自然数を考えると，

P は $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_n$ で割り切ることができない

ので，

P は素数となる．

ここで，P はどの $p_k\ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$ よりも大きいので，

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_n$$

の中にはない素数となる．

これは，素数が有限個しかないことに矛盾する．

よって，素数は無数に存在する．　□

3　$(-1)\times(-1) = 1$ となることの証明

中学 1 年のときに，$(-1)\times(-1) = 1$ となることの説明を受けたことだろう．中学校数学の段階では，説明で済まされるこの事実も証明が必要なことである．この証明の概略をあげておこう．

証明の前に，0，1，-1 の定義を述べておく．

数 n に対して，

$$n + x = x + n = n$$

となる数 x を 0 と表す．

数 n に対して，

$$n \times y = y \times n = n$$

[1] 背理法は「悪魔の証明」への反論方法としても有効だとされている．

となる数 y を $\frac{1}{x}$ と表す．

数 n に対して，

$$n+z=z+n=0$$

となる数 z を $-n$ と表す．この n が 1 のときの z が -1 である．

これらをもとにして，$(-1)\times(-1)=1$ を証明することができる[2)]．上の 0，1，-1 の定義がどのように関わってくるかに注意を払って，式変形を追ってもらいたい．

証明.

$$\begin{aligned}
(-1)\times(-1) &= (-1)\times(-1)+0 \\
&= (-1)\times(-1)+\{(-1)+1\} \\
&= (-1)\times(-1)+(-1)\times 1+1 \\
&= (-1)\times\{(-1)+1\}+1 \\
&= (-1)\times 0+1 \\
&= 0+1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

m，n を自然数とするとき，

$$(-m)\times(-n)=mn$$

の証明も，上の証明と同様にできる．挑戦してみてはどうだろうか．

4　数学と証明

数学には多くの未解決問題があるが，これらの「未解決」とは「証明がされていない」という意味である．その問題の解となるものを多数あげたとしても，それでは問題が解決したとはいわない．プリントであげた「双子素数予想」にしても，無数とも思えるような多数の双子素数を見つけてきても解決ではないのである[3)]．あくまでも「無数に存在する」ことを「証明」しなくてはならない．

ただ，一旦，論理的に矛盾なく証明されたことは，その結果が未来永劫変わることはない．実際に，紀元前に証明されたことが，現在でも正しいこととして成り立っている．他の自然科学の分野では，新たな発見によりそれまで正しいとされていたことが変わってしまうことがある．このことを考えても，数学の証明のもつ威力を実感できないだろうか．中学校では図形の問題を通して数学での証明の基本を学ぶ．そして，高等学校では上にあげたようないろいろな証明法を学ぶことで，証明できることを増やしていく．証明というと，毛嫌いする中学生や高校生が多いが，AI が進歩している現代では，「論理的に矛盾なく証明できる力」というものは必要不可欠である．ぜひ「証明」の学習を避けずに取り組んで欲しい．

[2)] 分配法則に関する議論が必要になるが，ここでは深入りをしない．

[3)] もちろん，予想が正しいことの信頼性は高まるが．