

数列の不思議な世界

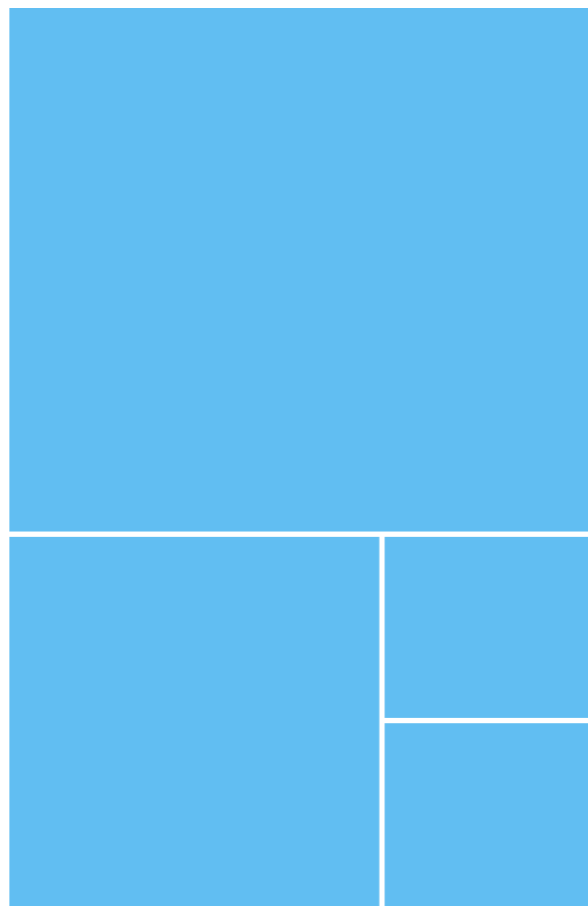
東京都立青山高等学校
数学科 石井 啓

1. 長方形の分割

中学校の入試問題の中にも高等学校で学習する数列の内容が背景になっているものがある。その背景を探ってみよう。

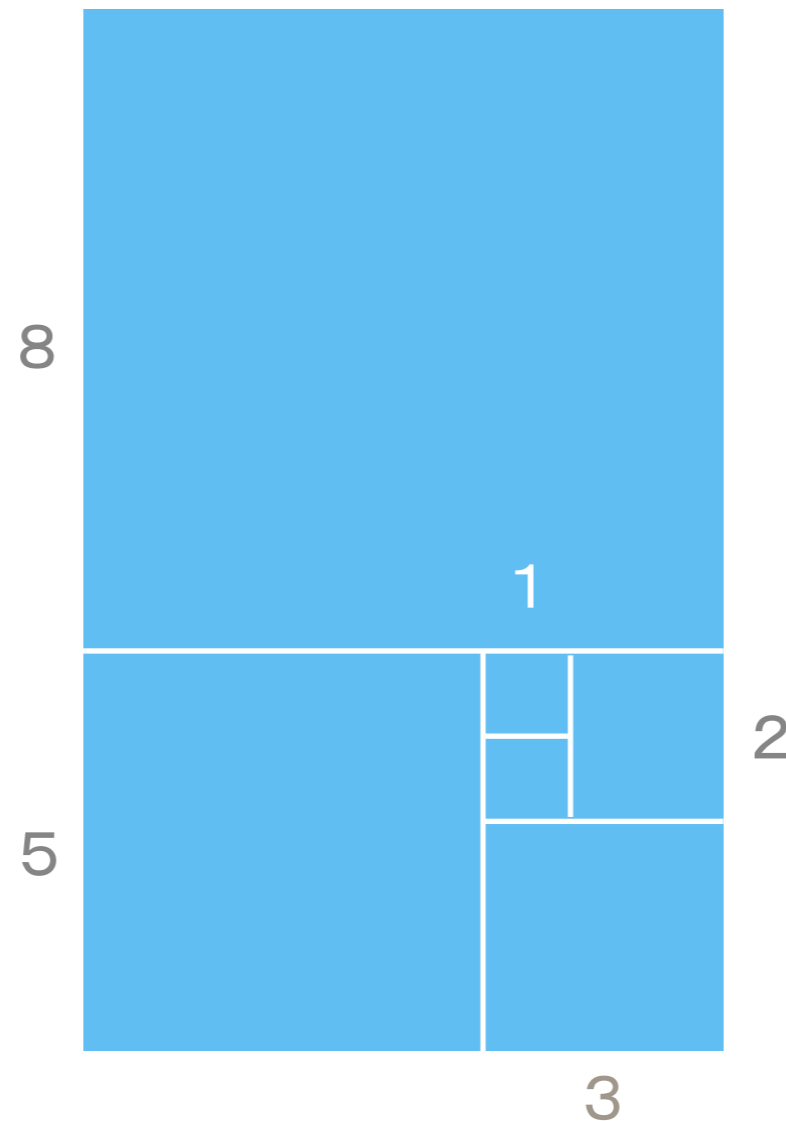
中学校の入試問題

長方形の紙から短い辺を一辺とする正方形を切り取る。次に、残った長方形から同じようにして正方形を切り取る。この作業をくり返して、残った四角形が正方形になったら終わりにする。



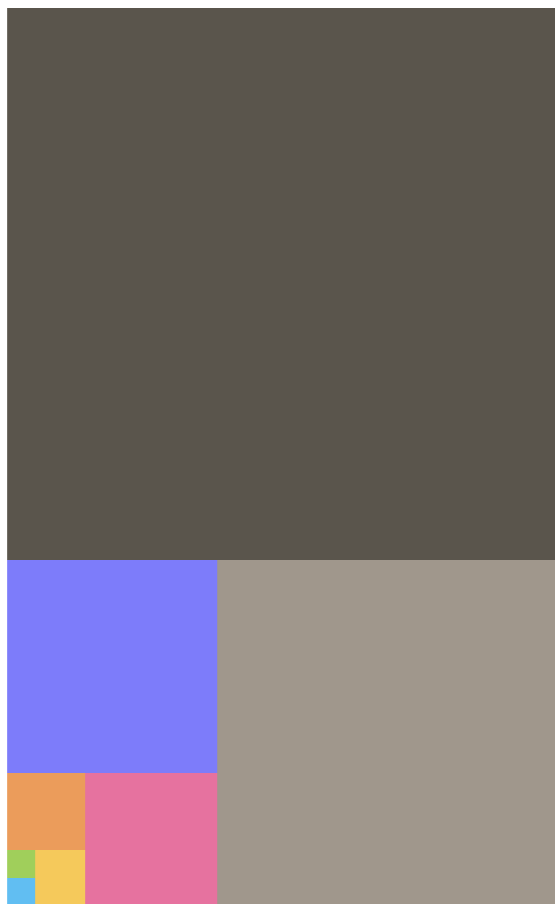
中学校の入試問題 (1)

- 長い辺が13cm, 短い辺が8cmの長方形の紙を使う.
- (ア) 3番目にできた正方形の一辺の長さを求めよ.
- (イ) 全部で正方形が何枚できるか求めよ.



中学校の入試問題 (2)

(1)と大きさが異なる紙を使ったところ、全部で8枚の正方形ができた。このうち、2枚は大きさが同じであるが、残りはすべて大きさが異なる。もとの長方形の長い辺と短い辺の比の値を求めよ。ただし、小数第2位を四捨五入し、小数第1位まで求めるものとする。



中学校の入試問題 (2)

正方形	n 枚目	1	2	3	4	5	6	7	8
	一辺	1	1	2	3	5	8	13	21
長方形	短い辺	1	1	2	3	5	8	13	21
	長い辺	1	2	3	5	8	13	21	34
	比の値	1	2	1.5	1.7	1.6	1.6	1.6	1.6

正方形の一辺の長さ

正方形の一辺の長さは、

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .

この間の関係に注目すると

$$2 = 1 + 1$$

$$3 = 1 + 2$$

$$5 = 2 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$13 = 5 + 8$$

$$21 = 8 + 13$$

フィボナッチ数列

用語解説

F_n : n 枚目の正方形の一辺の長さ

F_{n+1} : $(n + 1)$ 枚目の正方形の一辺の長さ

F_{n+2} : $(n + 2)$ 枚目の正方形の一辺の長さ

正方形の一辺の長さは

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

を満たす数列となる。



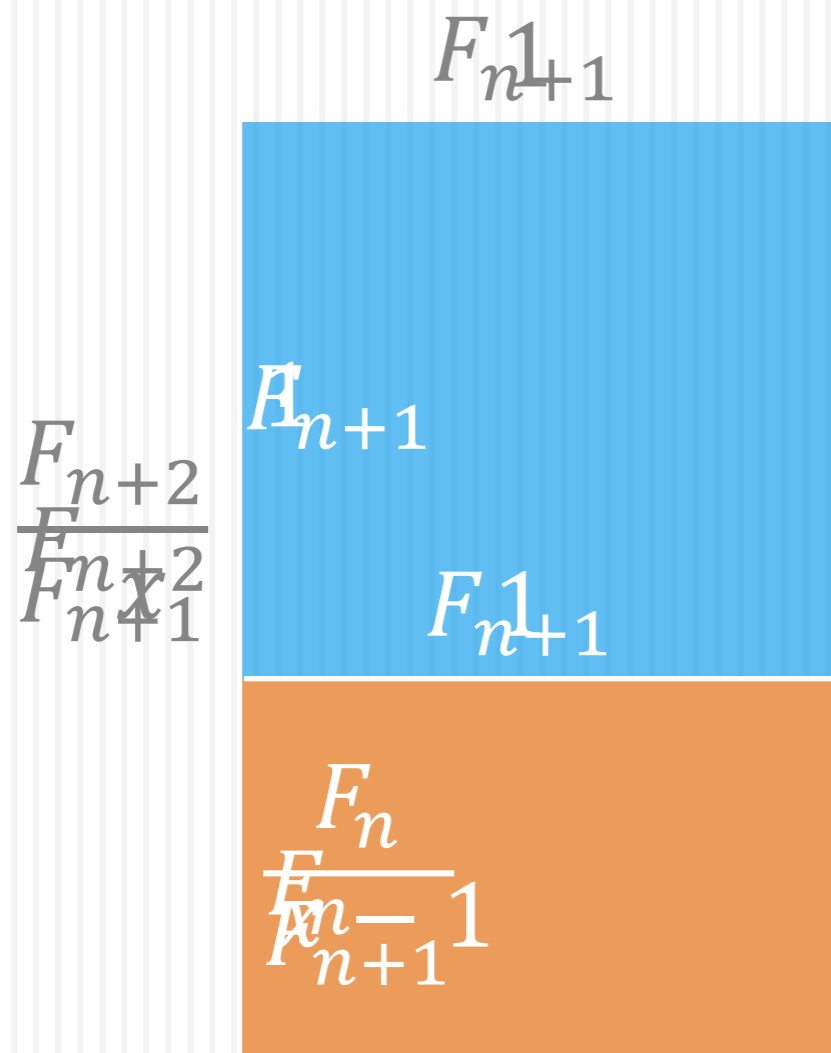
2. 比の値の謎

フィボナッチ数列の隣り合った項に現れた比の値の謎を探ってみよう.

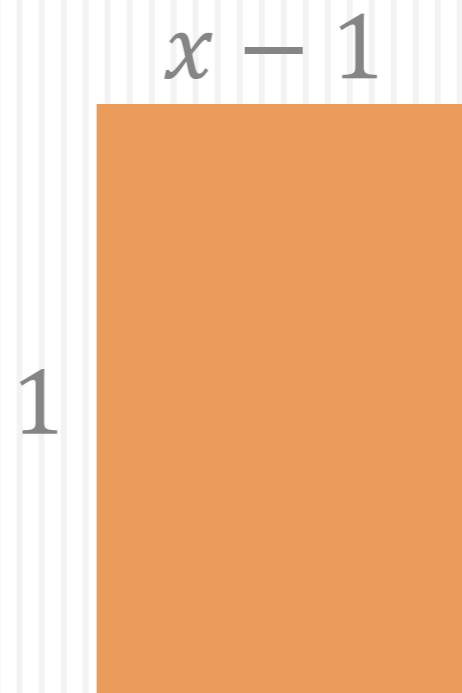
比の値

	n枚目	1	2	3	4	5	6	7	8
正方形	n枚目	1	2	3	4	5	6	7	8
	一辺	1	1	2	3	5	8	13	21
長方形	短い辺	1	1	2	3	5	8	13	21
	長い辺	1	2	3	5	8	13	21	34
	比の値	1	2	1.5	1.7	1.6	1.6	1.6	1.6

比の値の意味を探る



この方程式を解く



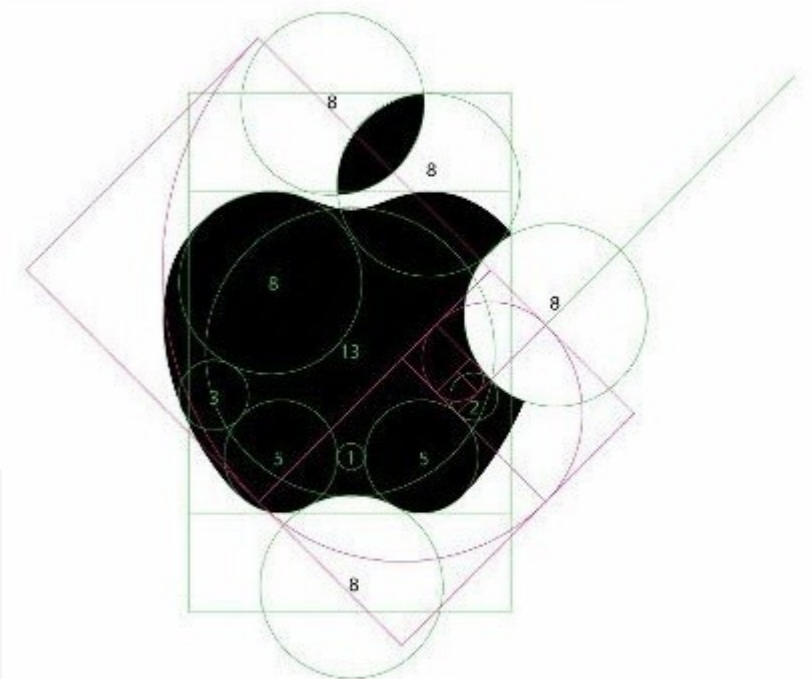
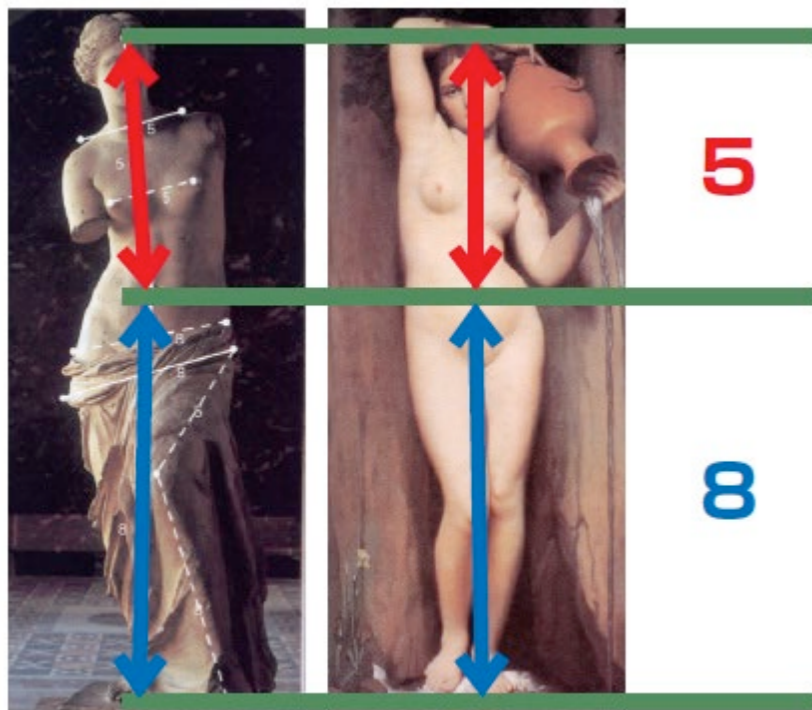
$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \quad \text{より} \quad x(x-1) = 1 \quad \therefore x^2 - x - 1 = 0$$

黄金数

$x^2 - x - 1 = 0$ の正の解は

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803 \dots$$

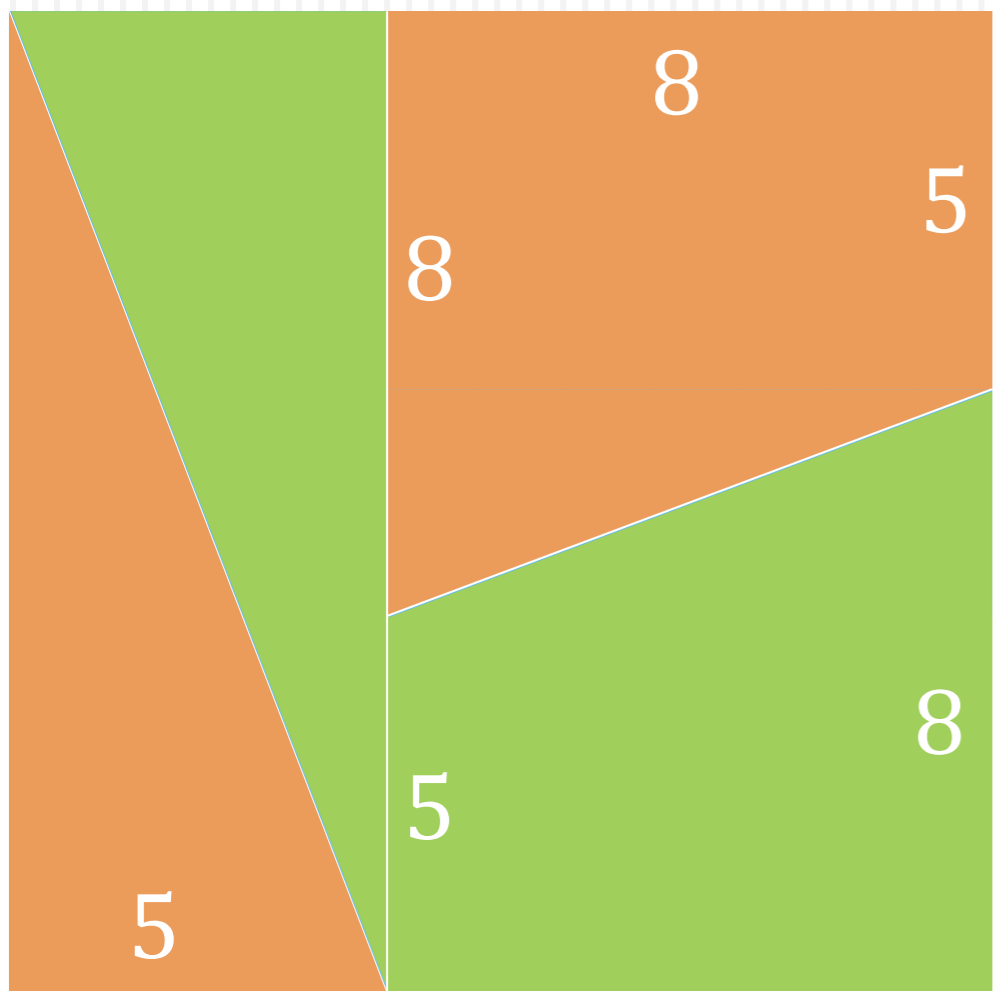
多くの人々が美しいと感じると比の値となっている。



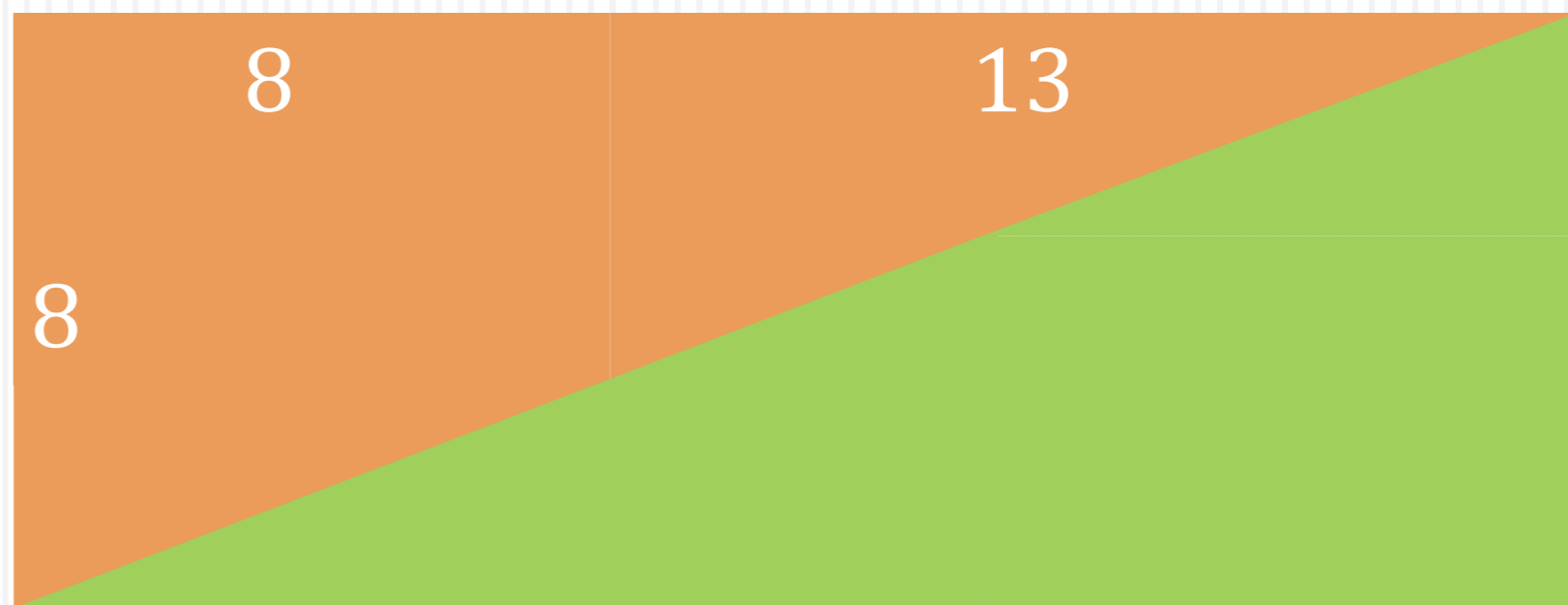
3. 面積が減った！

フィボナッチ数列の性質を利用した不思議なパズルを紹介しよう.

正方形を切って並べかえると・・・



13



21

正方形の面積 : $13 \times 13 = 169$

長方形の面積 : $8 \times 21 = 168$



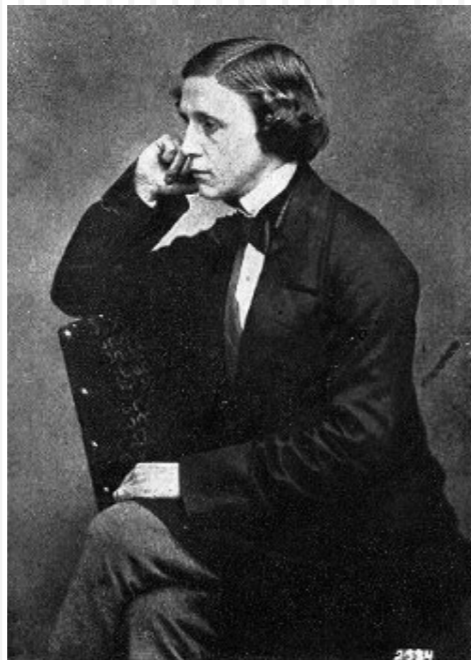
カッシーニ・シムソンの定理

用語解説

ドジソンのパズルには、フィボナッチ数列の持つ次の性質が使われている。

$$F_n \times F_{n+2} - (F_{n+1})^2 = (-1)^{n+1}$$

ちなみに、ドジソンは次の小説の原作者でもある。





数学を楽しもう！

数学にはおもしろく、美しい分野がたくさんあります。高校入学後は、数学の世界を思いっきり楽しんでくれることを期待しています。