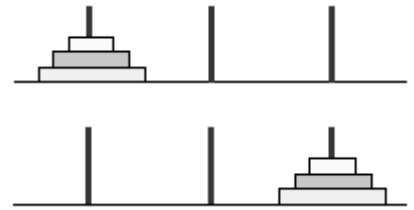


ハノイの塔の最小手順を考えよう！

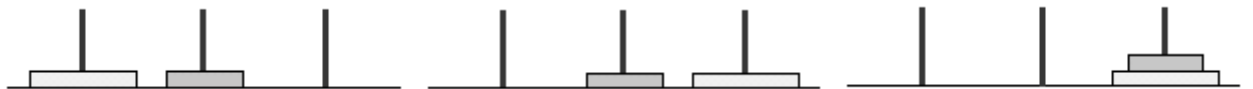
1. 世界の終末

古くからあるパズルゲームに「ハノイの塔」と呼ばれるものがある。これは、棒に小さいものから大きいものへと積んである円板を、次の3つのルールにしたがって別の棒に移動するというゲームである。



- (1) 円板は、1回に1枚しか動かさない
- (2) 小さい円板の上に大きい円板をのせてはならない
- (3) すべてを別の場所へ移し換える

例えば、円板が2枚のときは下図のように3回の手順で移すことができる。



問題① 円板が3枚のとき、最小何回の手順で移すことができるだろうか。図を描いて考えてみよう。

さて、このゲームは、インドに伝わる次の伝説をもとにしてつくられたと言われている。

インドにあるバラモン教の寺院には64枚の金でつくった円板があり、僧侶が円板を移し換えている。そして、64枚が移し換えられたとき、この世が終わる……

64枚の円板を移し換えるには、どのくらいの（最小）手順がいるのだろうか。

2. 円板の数と最小手順

円板の数を n 、そのときの最小手順を M_n とする。このとき、 n と M_n の関係を表にまとめてみよう。このような規則的に並んだ数の並びを数列という。

n (枚数)	1	2	3	4	5	6	...
M_n (回数)							

この和を次のようにして求めてみよう.

$$M_5 = \dots \textcircled{1}$$

$$M_5 = \dots \textcircled{2}$$

①-②を計算すると, 次のようになる.

$$M_5 =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

では, この方法をもとにして M_n の値を求めてみよう.

$$M_n =$$

$$M_n =$$

これらより,

$$a_n =$$

$$=$$

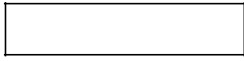
この M_n の n に 64 を代入することで M_{64} の値を求めることができる. このように, くり返しの計算をせず直接に数列の n 番目を求められる式を数列の**一般項**という.

問題 ③ ハノイの塔の最小手順の数列の一般項 M_n を利用して, 64 枚の円板を移し変える最小手順を求めよ. また, 1 枚の円板を 1 秒で移せたとして, 約何年かかるか調べてみよう.

参考 1日 = 86400 秒であり, 1年を 365 日とすると, 1年 = 31536000 秒となる.

5. ハノイの塔の最小手順に現れる自然数

ハノイの塔の最小手順の数列に現れる自然数 M_n は, $n=1, 2, 3, \dots$ としたとき,



と表せた. 一般に, この形で表される自然数をメルセンヌ数という. 特に, M_n が素数になるときメルセンヌ素数という. ここで, 素数とは 2 以上であり, 正の約数が 1 とその数自身のみである自然数のことをいう. 素数は無数に存在することが紀元前にユークリッドによって証明されているが, メルセンヌ素数は 2024 年 10 月現在で 52 個しか発見されていない. また, このメルセンヌ数には,

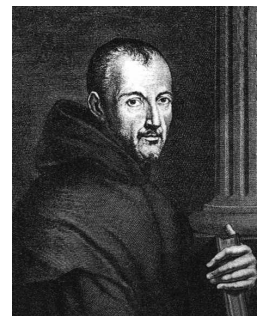
M_n が素数ならば n も素数である…(*)

という興味深い性質があることが知られている. (*) の逆は必ずしも成り立たないが, 素数の候補を探すことはできる. メルセンヌ数の名の由来になっている数学者メルセンヌは 1644 年に,

素数 p で $2^p - 1$ が素数になるのは $p \leq 257$ では,

$p=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ の 11 個の場合だけである

という予想を発表した. メルセンヌ自身はこの予想を完全には証明することができなかった. メルセンヌの死後, オイラーやリュカらによって証明された ($p=67, 257$ のときは素数ではなかった!). 予想すべてが解決したのは 1922 年である. メルセンヌによって予想が出されてから, 実に 278 年もの歳月が流れていた.



メルセンヌ素数の探索は現在も続けられており, グレート・インターネット・メルセンヌ素数探索(GIMPS)という分散コンピューティングを利用したプロジェクトが 1996 年に発足している.

6. 数学の未解決問題

数学の予想には, メルセンヌの予想のように解決までに長い歳月がかかるものが多い. 例えば, 双子素数予想がある. 差が 2 である 2 つの素数を双子素数というが, この双子素数が無数に存在するかどうかは未だに解決できていない. 小学生でも問題の意味を理解できるものであるが, 未解決なのである. この他にもまだ多くの未解決問題があり, それらの問題を解決していく中で数学は発展してきた. そして, これらの未解決問題の中でも最大の難問がリーマン予想であろう. この予想の意味を理解するには, 高等学校の数学の知識が必要となる. ぜひ, 高等学校の数学を学び(探究し), さらに大学でも数学を学んで(研究して), 未解決問題に挑戦する人が出てもらいたい.