

Fibonacci 数列

石井 啓 (東京都立青山高等学校)

1. Fibonacci 数列とは

12世紀から13世紀のイタリアのピサで活躍した数学者 Leonardo Pisano が、その著書『計算の書』(原題: *Liber abbaci*)¹⁾の第12章で

ある人が壁で囲まれた場所に1つがいの親ウサギを入れた。1年間に何つがいのウサギが増えるだろうか。ただし、どのつがいも生まれて2ヶ月目から毎月1つがいのウサギを産むものとする。

という「ウサギの問題」を取り上げた。その解答の中で現れた数列が、現在 Fibonacci 数列と呼ばれている数列である。

Fibonacci 数列は次のように定義される。

定義 1.1 (Fibonacci 数列). 数列 $\{F_n\}$ が

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとき、数列 $\{F_n\}$ を Fibonacci 数列という。

定義の中に現れた

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

を漸化式という。漸化式は高等学校の『数学B』の中で学習する。そのときの例として Fibonacci 数列がよく扱われる。

2. Fibonacci 数列の一般項

数列を表現する方法の1つとして漸化式がある。数列のもつ規則を表すものなので、その数列の特徴を把握するには適している。しかし、第10項の数を知りたいということには向いていない。もし、第10項目の数を求めるのなら、漸化式を使って第1項から順に計算をしなければならないからである。

では、第10項の数をすぐに求められる方法はないのだろうか。数列には、その各項を一般的に式で表した一般項を求められるものもある。一般項を求めることができる数列であれば、第10項の数を、計算に時間がかかるかもしれないが直接求められる。Fibonacci 数列も一般項を求めることができる数列である。ただ、求めるためには、中学校の数学の範囲を越えてしまう。それでも気になる人のために、求め方をあげておこう。詳しくは、高等学校へ入学してからの楽しみとしてもらいたい。

¹⁾この本は、0を含むインド・アラビア数字とそれによる具体的な計算法をヨーロッパに紹介したことで有名となった。

定理 2.1 (Fibonacci 数列の一般項). Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ の一般項は

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}.$$

証明. $x^2 = x + 1$ を解くと

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

ここで,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

とおくと

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$$

となるので,

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\ &= 1 \cdot F_{n+1} - (-1) \cdot F_n \\ &= (\alpha + \beta)F_{n+1} - \alpha\beta F_n. \end{aligned}$$

これを次のように2通りに変形する.

$$F_{n+2} - \alpha F_{n+1} = \beta(F_{n+1} - \alpha F_n) \tag{1}$$

$$F_{n+2} - \beta F_{n+1} = \alpha(F_{n+1} - \beta F_n) \tag{2}$$

(1)において, $A_n = F_{n+1} - \alpha F_n$ とおくと, 数列 $\{A_n\}$ は, 第1項 A_1 を β 倍してつくられる数列となるので,

$$\begin{aligned} A_n &= \beta A_{n-1} \\ &= \beta \cdot \beta A_{n-2} \\ &= \beta^2 \cdot \beta A_{n-3} \\ &= \dots \\ &= \beta^{n-1} A_1 \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$A_1 = F_2 - \alpha F_1 = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot 1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \beta.$$

であるから,

$$\begin{aligned} A_n &= \beta^{n-1} A_1 \\ F_{n+1} - \alpha F_n &= \beta^{n-1} \cdot \beta. \end{aligned}$$

したがって,

$$F_{n+1} - \alpha F_n = \beta^n. \tag{3}$$

同様にして, (2) より,

$$F_{n+1} - \beta F_n = \alpha^n. \quad (4)$$

(4) から (3) を引くと

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)F_n &= \alpha^n - \beta^n \\ F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

となり,

$$\alpha - \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

であるから, 求める一般項は

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}.$$

□

3. Cassini - Simson の定理

Dodgson のパラドックス (正方形分割のパズル) で利用されている Fibonacci 数列の性質を『Cassini - Simson の定理』という. この定理の証明もあげておこう. $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ のとき, Fibonacci 数列の一般項が $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ となることを使えば, 中学校の数学の範囲でも適度な式変形の練習問題となる.

定理 3.1 (Cassini - Simson の定理). Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ において

$$F_n F_{n+2} - (F_{n+1})^2 = (-1)^{n+1}.$$

証明. $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ とおくと, 一般項 F_n は

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

となるので,

$$\begin{aligned} F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} - \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \{ (\alpha^n - \beta^n)(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) - (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})^2 \} \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{2n+2} - \alpha^n \beta^{n+2} - \alpha^{n+2} \beta^n + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n+2} + 2\alpha^{n+1} \beta^{n+1} - \beta^{2n+2}) \\ &= -\frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \alpha^n \beta^n (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\ &= -\frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha\beta)^n (\alpha - \beta)^2 \\ &= -(\alpha\beta)^n. \end{aligned}$$

よって,

$$\alpha\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1$$

であるから,

$$F_n F_{n+2} - (F_{n+1})^2 = -(-1)^n = (-1) \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

□

4. Fibonacci 数列いろいろ

講義の中で扱ったように, Fibonacci 数列と黄金数は密接な関係がある. これだけでも驚きかもしれないが, 他にもいろいろな所へ Fibonacci 数列は顔を出す. ヒマワリの種の螺旋, 松ぼっくりのかさの螺旋, タイルの敷詰めのパターン, 階段の上り下りのパターン, . . . などなど. Pascal の三角形という数のつくる三角形の中にも潜んでいる. Dan Brown 原作の映画『ダ・ヴィンチ・コード』(原題: *The Da Vinci Code*) の中では暗号と絡めて登場していた.

数学の中だけで考えても, Fibonacci 数列のおもしろい性質を多く見つけることができる. Fibonacci 数列の世界は奥が深い. そのため, 『Fibonacci 協会』²⁾ という Fibonacci 数列に関して研究をする国際的な組織も存在する. Fibonacci 協会が発行している季刊誌『Fibonacci Quarterly』には, Fibonacci 数列ファンの様々な研究成果が発表されている. アメリカの高校生の論文が掲載されたこともあったそうだ. みなさんも高校に入ったあと, Fibonacci 数列の研究に取り組んでみてはどうだろうか. 『Fibonacci Quarterly』に論文が載るかも?

Fibonacci 数列だけでなく, 数学にはおもしろく, 美しい分野がたくさんある. 分野によっては, 高校生のうちに大学のテキストを読みすすめることもできる. 高校入学後は, 授業の中の数学だけでなく, 広く数学の世界を楽しんでくれることを期待している.

参考文献

- [1] 中村滋 著, 『フィボナッチ数の小宇宙 改訂版』, 日本評論社, 2008年.
- [2] 結城浩 著, 『数学ガール』, ソフトバンククリエイティブ, 2007年.

²⁾ 『The Fibonacci Association Official Website』, URL <http://www.mathstat.dal.ca/Fibonacci/>