数 学 科 学 習 指 導 案

日　　時　2010 年 11 月 16 日（火）第 4 校時
対 象 者　全日制課程　普通科　2 年 1 組　42 名
授業者名　東京都立町田高等学校　教諭　石井　啓
場　　所　3 棟　3 階　2 年 1 組ホームルーム教室

1. 単元名　1 章　数列　　2 節　漸化式と数学的帰納法
教科書　飯高　茂・松本幸夫 他，『 数学 B 』，東京書籍，2007 年.
副教材　服部晶夫 監修，『 ニューアクション β　数学 II + B 』，東京書籍，2008 年.
授業者作成プリント『 $\boxed{10}$ ハノイの塔 』，『 $\boxed{11}$ 漸化式から一般項へ 』

2. 単元の目標
・数列の帰納的定義について理解し，簡単な漸化式を解くことができるようにする.
・数学的帰納法について，その考え方を理解し，等式や不等式の証明に利用できるようにする.

3. 生徒の実態　**【学年】**
・例年に比べ，模擬試験の成績で上位層を占める生徒の割合が少ない学年である．しかし，その上位層の中には，数学に関する知的好奇心を持ち，自学でどんどん先の内容を学んでいる生徒もいる．入学時からの様子を見ていても上位層の生徒が数学の学習に対して意欲的でないとは考えていない.
・中位層の中には，課題などするべきことを与えられれば学習に取り組む生徒が多いが，主体的に学習に取り組もうとする生徒は少ない．与えられた課題には真摯に取りくむ生徒が多く，主体的かつ継続的に学習に取り組めば実力が伸びる生徒が多いのではないかと考えている.
・上位層の生徒の実力を伸ばすこと，中位層の生徒の学習に対する主体性と継続性の確立，という 2 つが受験生となるのを目前にした本学年の課題である.

【クラス】
・数学 B では HR 単位での授業を行っている．第 1 学年の評定平均をもとに，各 HR がほぼ均等となるように編成されている．そのため，数学が得意な生徒と苦手な生徒の占める割合が，HR によって一律ではない.
・数学に対して苦手意識を持つ生徒の占める割合が少なくないが，授業には真剣に取り組む生徒が多い．ただ，授業外（家庭）での自学自習が確立されておらず，学習内容の定着という点で課題がある.

4. 単元について　**【年間指導計画における位置づけ】**
・本校の数学 B においては，『1 章　数列』，『2 章　ベクトル』，『3 章　統計とコン

ピュータ』,『4 章　数値計算とコンピュータ』の 4 単元のうち,『1 章　数列』,『2 章　ベクトル』を学習することにしている.

・本校における過去の実践において，ベクトルに関しては平面ベクトルと空間ベクトルの学習時期を分けた方が，定着がよかったという事例がある．そこで，本学年では『2 章　ベクトル』の 1 節と 2 節から学習を始め，3 節は『1 章　数列』を学習してから扱うことにした.

5. 単元の評価規準

	ア　関心・意欲・態度	イ　数学的な見方・考え方	ウ　技能・表現	エ　知識・理解
単元の評価規準	○自然数に関する命題を証明する方法として, 数学的帰納法の有用性について考えようとする.	○数列の漸化式から一般項を推定して証明するなどの考察を通じて, 論理的な思考力を養う.	○漸化式や数学的帰納法を通して, 論理的考察ができる. ○数列に関する命題を数学的帰納法で証明する方法を習得する.	○漸化式と数学的帰納法の意味を理解している.
学習活動に即した具体的な評価基準	①自然数に関する命題に興味をもって取り組むことができる.	①漸化式から一般項を求めるとき, 既知の数列の漸化式に帰着できることに気づく. ②2 段階の操作によって, すべての場合が尽くされる数学的帰納法の威力に気づく.	①漸化式を扱うことができ, 一般項を求めることができる. ②数学的帰納法による証明は形式的であるが, その本質的な部分を表現, 処理することができる.	①数列の帰納的定義について理解している. ②数学的帰納法の考え方について理解している.

6. 単元の指導計画と評価計画（8 時間扱い）

時間	学習内容	評価規準［評価方法］
第 1 時 （本時）	○数学の帰納的定義について理解する ○漸化式について理解する	エ－① ［観察・プリント］
第 2 時	○漸化式を解き，数列の一般項を求める	イ－①，ウ－① ［観察・プリント］
第 3 時	○漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ を解く (1)	イ－①，ウ－① ［観察・プリント］

第 4 時	○漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ を解く (2)	イ－①，ウ－① ［観察・プリント］
第 5 時	○問題演習	ウ－① ［観察・プリント］
第 6 時	○数学的帰納法の考え方を理解する ○漸化式から推定した一般項を証明する	イ－②，エ－② ［観察・プリント］
第 7 時	○数学的帰納法で等式を証明する ○数学的帰納法で不等式を証明する	ア－①，ウ－② ［観察・プリント］
第 8 時	○問題演習	ウ－② ［観察・プリント］

7．授業観察の視点　【帰納的定義の必要性を実感させる】

教科書の導入のように天下り的に数列の帰納的定義を導入しても，その必要性は実感しにくいと考えた．そこで，パズル『ハノイの塔』の最小手順を求めることを通して，帰納的定義が数列を考える上で必要なものであることを実感させるようにした．

8．本時（第 1 時）

(1) 本時の目標　・数列の帰納的定義の必要性を実感する．
　　　　　　　・数列の帰納的定義について理解する．

(2) 本時の展開

時間	■学習内容　○学習活動	指導上の留意点	評価規準［評価方法］
導入（10分）	■ハノイの塔について ○パズル『ハノイの塔』のルールを 2 枚の場合を例にして学ぶ． ■3 枚のハノイの塔 ○ルール確認の意味も含めて，3 枚の場合について考える． ■4 枚，5 枚，6 枚のハノイの塔 ○4 枚，5 枚，6 枚の場合のハノイの塔について考える．	・この時点ではプリントは配布せず，PC による説明を聞くように指示する． ・発問をしながら生徒と一緒に考えていく．その後，PC を使って円板の動きを見る． ・2 枚を他の棒に移す必要があることに気づかせる． ・試行錯誤するだけでなく，最小手順を求める仕組みも考えるように指示する．	

展開Ⅰ（15分）	■4 枚のハノイの塔の最小手順 ○4 枚の場合の説明を聞き，最小手順が （3 枚の板の移動） ↓ （最大の板の移動） ↓ （3 枚の板の移動） となっていることを知る． ■数列の帰納的定義 ○ハノイの塔の $n+1$ 枚の場合をもとにして，数列の帰納的定義および漸化式について知る．	・プリント『 10 ハノイの塔 』を配布する． ・4 枚の場合を説明後，6 枚の場合の仕組みついて発問する（プリントの空欄アに相当）． ・数列の帰納的定義では，初項が必要であることを	 ・エ－①［観察］
展開Ⅱ（15分）	■ 例 題 ❶の解説 ○板書を写す． ■ 問 題 ① ○ 問 題 ① を解く． (1) $a_1=1$，$a_2=2$， $a_3=5$，$a_4=14$， $a_5=41$ (2) $a_1=3$，$a_2=1$， $a_3=-1$，$a_4=-3$， $a_5=-5$ (3) $a_1=2$，$a_2=-6$， $a_3=18$，$a_4=-54$， $a_5=162$	・プリント『 11 漸化式から一般項へ 』を配布する． ・(2) が初項：3，公差：-2 の等差数列であることを確認する． ・(3) として，次の問題を追加で与える． $a_1=2$，$a_{n+1}=-3a_n$ ・(2)，(3) を通して，既習の等差数列，等比数列の帰納的定義について確認する．	 ・エ－①［プリント］
まとめ（5分）	■帰納的定義の確認	・次回は漸化式から一般項を求める方法を学習することを知らせる．	

(3) 座席配置

黒板

136	129	122	115	108	101
137	130	123	116	109	102
138	131	124	117	110	103
139	132	125	118	111	104
140	133	126	119	112	105
141	134	127	120	113	106
142	135	128	121	114	107

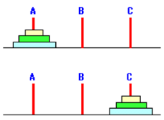
(4) 授業者作成プリント

『 10 ハノイの塔 』

10 ハノイの塔

1 世界の終末

古くからあるパズルゲームに「ハノイの塔」と呼ばれるものがある．これは，右図のように棒に小さいものから大きいものへと積んである円板を，別の棒に移動するというゲームである．



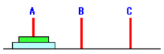
ただし，次の３つのルールがある．

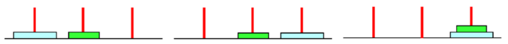
（１） 円板は，１回に１枚しか動かせない

（２） 小さい円板の上に大きい円板をのせてはならない

（３） すべてを別の場所へ移し換える

例えば，円板が２枚のときは下図のように３回の手順で移すことができる．





問 題 ① 円板が３枚のとき，最小何回の手順で移すことができるだろうか．

さて，このゲームには昔から次のような伝説がある。

インドにあるバラモン教の寺院には64枚の金でつくった円板があり，僧侶が円板を移し換えている．そして，64枚が移し換えられたとき，この世が終わるのだという．

64枚を移し換えるには，どのくらいの（最小）手順がいるのだろうか．

2 円板の数と最小手順

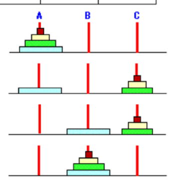
円板の数を n， そのときの最小手順を a_n とする．n と a_n の関係を表にまとめてみよう．

数列 No.10

n（枚数）	1	2	3	4	5	6	…
a_n（回数）							

考え方 円板が４枚の場合で考えてみよう．

４枚を移すには，



（１）まず，３枚を他の棒(C)に移す必要がある

（２）続いて，一番大きい円板を棒(B)に移す

（３）さらに，３枚の円板を棒(B)に移す

という手順にすればよい．

つまり，次のことがいえる．

６枚を移す手順の数＝ア

上のことから，$n+1$ 枚の円板の場合には，次のようにいえる．

$n+1$ 枚を移す手順の数＝イ ……(＊)

3 漸化式

円板の数を n， そのときの最小手順を a_n としたとき，式(＊)は次のように表せる．

$a_{n+1}=$ ウ

ハノイの塔の移動手順に関して，次のようにまとめることができる．

$$\begin{cases} a_1 = \boxed{\text{エ}} & \cdots\cdots① \\ a_{n+1} = \boxed{\text{オ}} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

このような数列の決め方を数列の カ という．また，式②のように２項間（a_n と a_{n+1}）の手続きを表す式を キ という．

年 組 番 氏名

『 11 漸化式から一般項へ 』

11 漸化式から一般項へ

1 漸化式に慣れよう

初項と漸化式で決まる数列を考えよう．

例題1　次の初項と漸化式で決まる数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までを書け．

$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-2$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$

解

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

問題①　次の初項と漸化式で決まる数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までを書け．

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n-1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n-2$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

2 漸化式から一般項を求めてみよう

初項と漸化式で決まる数列の一般項を求めてみよう．

例題2　次の初項と漸化式で決まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-2$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$

解

問題②　次の初項と漸化式で決まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$

問題③　ハノイの塔の最小手順に関する数列は，次の初項と漸化式で決まった．一般項を求めてみよう（解答は裏面に書くこと）．

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$

年　　組　　番　氏名