

数学科学習指導案

平成 20 年 1 月 16 日（水）第 5 時限
東京都立千歳丘高等学校
第 3 学年自由選択科目 計 5 名
指導者 石井 啓

1 単元名 「媒介変数表示と極座標」

- ・教科書 大矢 雅則, 岡部 恒治 他, 『新編 数学 C』, 数研出版, 平成 15 年.
- ・副教材 数研出版編集部 編, 『基本と演習 テーマ数学 III + C』, 数研出版, 平成 16 年.

2 単元の目標

- ・曲線の媒介変数表示の意味を知り, 媒介変数を用いて既習の曲線を表したり, 媒介変数を使うことで容易に表せる曲線について調べたりする。
- ・極座標の定義を知り, 極座標を用いて既習の曲線を表したり, 極座標を使うことで容易に表される曲線について考察したりする。
- ・コンピュータを利用して, いろいろな曲線を描き, その形を観察する。

3 生徒の実態

第 3 学年の自由選択科目であるので, 第 1 学年や第 2 学年のときと比べると数学に対する学習意欲が高くなっている。そのため, 授業中の発問に対しても積極的に答えたり, 問題演習も指示された問題を解くだけでなく, 次の問題にも取り組もうとしたりするなど, 大変に意欲的である。

また, 生徒 5 名全員が 4 年制大学（理工学系・農学系・経済学系）への進学を希望しており, 全員が一般入試での合格を目指して学習に取り組んでいる。そのため, 既習事項に関する知識と技能の復習もよくなされている。また, 授業中に, 定着がよくない既習事項が出てきても, それを身につけなおそうという姿勢が見られる。一方で, 全員が一般入試を目指しているために, 受験を意識しての学習になりがちな面がある。それも, 生徒の心情を考えれば当然のことであろう。ただ, 数学のもつ楽しさ・美しさを実感（体感）できるような学びもさせたい（してもらいたい）と考えている。

4 単元について

本単元では, いろいろな曲線の基本性質を解析幾何学的方法で調べるだけでなく, 媒介変数や極座標などの表現による方法で調べ, 図形に対する理解を深める。そして, その方法に習熟し, いろいろな曲線を鑑賞することを目標とする。

媒介変数や極座標を使って既習の曲線を表すことから始める。そして, 媒介変数や極座標を使わなければ, 容易に表すことのできない曲線についての考察・観察につながるように指導をしていく。その際, 視覚的に理解・納得できるようにコンピュータを利用する。

また, コンピュータ利用して曲線を観察することで, 生徒の知的好奇心を刺激し, 数学の楽しさ・美しさが伝わり, 数学がより身近になることを目指す。

5 単元の評価規準

観点	ア 関心・意欲・態度	イ 数学的な見方や考え方	ウ 表現・処理	エ 知識・理解
単元の評価規準	曲線を媒介変数や極方程式で表す考え方に関心をもつとともに、それらを事象の考察に積極的に活用しようとする。	曲線を媒介変数や極方程式で表すための見方や考え方を身につけ、思考の過程を振り返り、論理的に考えられる。	曲線を媒介変数や極方程式で表現し、処理する仕方を身につけ、よりよく問題を解決できる。	曲線を媒介変数や極方程式で表す原理、用語・記号などを理解し、基本的な知識を身につけている。
学習活動に即した具体的な評価規準	①曲線の媒介変数表示に関心を持ち、活用しようとする。 ②曲線の極方程式に関心を持ち、活用しようとする。 ③コンピュータでの曲線表示に関心を持ち、すすんで取り組もうとする。	①いろいろな曲線の媒介変数表示を求める過程を考察できる。 ②いろいろな曲線の極方程式を求める過程を考察できる。 ③コンピュータの曲線表示プログラムについて考察できる。	①いろいろな曲線の媒介変数表示を求められる。 ②いろいろな曲線の極方程式を求められる。 ③コンピュータで曲線表示ができる。	①いろいろな曲線の媒介変数表示について理解している。 ②いろいろな曲線の極方程式について理解している。 ③コンピュータの曲線表示プログラムについて理解している。

6 単元の指導計画と評価計画

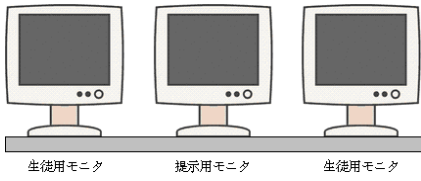
	学習内容	評価規準 [評価方法]
第1・2時	・媒介変数表示の定義 ・2次曲線の媒介変数表示	イ-①・ウ-① [観察]
第3・4時	・媒介変数表示の曲線の平行移動 ・サイクロイド	ウ-①・エ-① [観察・ノート]
第5・6時	・直角座標と極座標 ・極方程式	イ-②・ウ-② [観察]
第7・8時	・直角座標の方程式と極方程式 ・2次曲線の極方程式	ウ-②・エ-② [観察・ノート]
第9・10時	・数式処理ソフトウェアの基本操作 ・ $y=f(x)$ の形で表された曲線の描画	イ-③・ウ-③・エ-③ [観察・プログラム]
第11・12時 (本時)	・媒介変数、極方程式で表された曲線の描画 ・リサージュ曲線と正葉曲線についての考察	ア-①・ア-②・ア-③ [観察・プリント]

7 本時（第11時）

(1) 本時の目標

- ・数式処理ソフトウェアを利用して、媒介変数表示された曲線や極方程式で表される曲線をかくことができる。
- ・数式処理ソフトウェアを利用して曲線を観察・考察することで、数学のもつ楽しさ・美しさを実感できる。

(2) 本時の展開

時間	○ 学習内容 ・ 学習活動	指導上の留意点	評価規準 [評価方法]
導入 (10分)	○媒介変数, 極方程式の復習 ・ホワイトボードを見ながら, ワークシートの空欄を埋める。	・教科書の該当ページも適宜参照させる。	・エ-① [観察] ・エ-② [観察]
展開 I (15分)	○リサージュ曲線の定義 $\begin{cases} x = a \cos mt \\ y = b \sin nt \end{cases}$ <ul style="list-style-type: none"> ・提示用モニタを見ながら, ワークシートの空欄を埋める。 ○リサージュ曲線の描画 例題 ① 次の曲線をかく。 (1) $x = 3 \cos 3t, y = 3 \sin 2t$ <code>ParametricPlot[{3*Cos[3t], 3*Sin[2t]}, {t, 0, 2Pi}]</code> (2) $x = \cos 3t, y = \sin nt$ の n の値を 1 から 6 まで変化させる。 <code>Table[ParametricPlot[{Cos[3t], Sin[n*t]}, {t, 0, 2Pi}], {n, 1, 6}]</code> <ul style="list-style-type: none"> ・提示用モニタを見ながら, 自分のコンピュータに入力し, プログラムを実行する。 演習 ① 次の曲線をかく。 (1) $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t$ (2) $x = 3 \cos 4t, y = 3 \sin 5t$ (3) $x = 3 \cos 4t, y = 3 \sin nt$ の n の値を 1 から 6 まで変化させる。 <ul style="list-style-type: none"> ・自分でコンピュータにプログラムを入力して曲線をかく。 	【モニタの配置】  <ul style="list-style-type: none"> ・媒介変数表示された曲線をかくには, ParametricPlot を使うことを説明する。 ・Table は前時に学習したことを確認する。 ・曲線の概形を予想させる。 <ul style="list-style-type: none"> ・曲線の概形を予想させる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・エ-③ [観察] ・ウ-③ [観察] ・ア-① [観察]

○正葉曲線の定義

$$r = a \sin kt$$

- ・ 提示用モニタを見ながら，ワークシートの空欄を埋める。

○正葉曲線の描画

例題 ② $r = \sin 2t$ をかく。

```
r=Sin[2t];
ParametricPlot[{r*Cos[t],r*Sin[t]},{t,0,2Pi}]
```

- ・ 提示用モニタを見ながら，自分のコンピュータに入力し，プログラムを実行する。

○正葉曲線に関する考察

演習 ② $r = 2 \sin kt$ の k の値を 1 から 6 まで変化させた場合について曲線をかき。

問題 $r = 2 \sin kt$ の k の値と正葉曲線の葉の数について，次の問いを考えよう。

- (1) k の値と正葉曲線の葉の数の間には，どのような規則性があると考えられるだろうか。
 - (2) (1) の規則性が正しいかどうかを k の値をいろいろと変えることで確かめてみよう。
- ・ 自分でコンピュータにプログラムを入力して解決する。

○極方程式で表される曲線

演習 ③ 次の極方程式で表される曲線をかき。

- (1) $r = at$
(a の値は各自で決める)
 - (2) $r = a(1 + \cos t)$
(a の値は各自で決める)
 - (3) $r = a + b \cos t$
(a, b の値は各自で決める)
- ・ 自分でコンピュータにプログラムを入力して曲線をかき。

- ・ 極方程式で表される曲線をかきプログラムも媒介変数表示での記述であることを確認する。
- ・ 曲線の概形を予想させる。

- ・ 様子を見て，組込み関数 Table を使うことを示唆する。
- ・ **問題** の (2) は， k の値を 7 以上の数にして曲線をかきように指示する。

- ・ 曲線の概形を予想させる。
- ・ **演習 ③** の曲線が
 - (1) アルキメデスの螺旋
 - (2) カージオイド
 - (3) リマソン
 ということも説明する。

・ エー③ [観察]

・ ウー③ [観察]

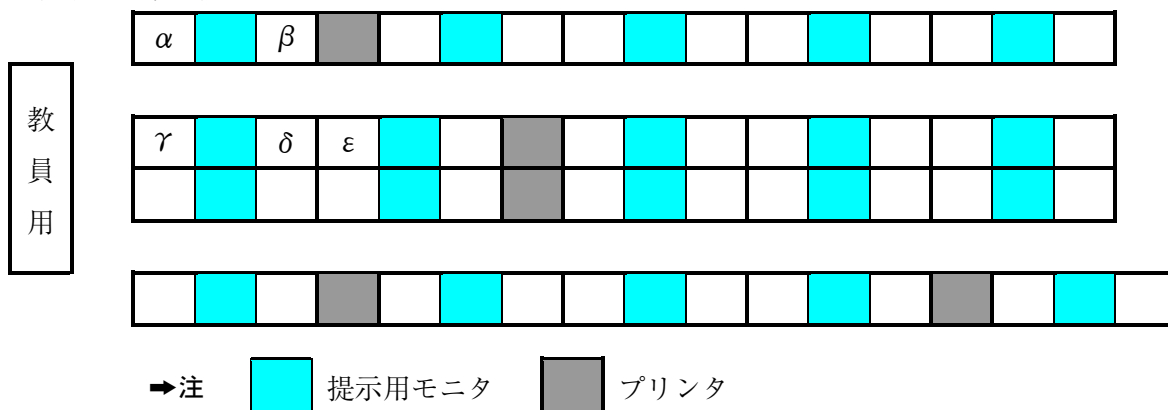
・ アー③

[観察・プリント]

・ アー② [観察]

まとめ (5分)	<p>○媒介変数表示された曲線や極方程式で表された曲線にかくプログラムについてのまとめ</p> <p>・本時で学習した入力方法を各自で確認する。</p>	<p>・6 限目にリサージュ曲線についての考察をすることも伝える。</p>	
-------------	--	---------------------------------------	--

(3) 本時の座席配置



(4) 本授業についての補足

自由選択科目は5限と6限の2時間にわたって行われ、間に10分間の休み時間が入るのが通常である。しかし、本授業は生徒の希望により、年度当初から5限と6限を連続して100分間で授業を行っている。そのため、指導計画も5限と6限を連続した形で立ててきた。ただ、第9・10時、第11・12時はコンピュータを使うため、健康上の観点から5限と6限の間に10分間の休み時間を入れることにした。

8 本時の授業実践の視点

(1) 指導技術（授業展開）

－知的好奇心の刺激－

人間は誰もが旺盛な知的好奇心をもっている。この知的好奇心を刺激して高めることができれば、それを充足しようという欲求が働き、生徒が自己学習をすすめるための大きな動機づけになる。問題なのは、知的好奇心が刺激される場面は人それぞれであり、それを充足する方法も多様だということである。そこで、その多様性にも対応するために、コンピュータを使用する。生徒1人1人がコンピュータを使うことで、各人の知的好奇心を刺激し、同時に各人の手で知的好奇心を充足するようにしていく。

(2) 教材開発・教材解釈

－数学のもつ楽しさ・美しさが実感できるコンピュータの使い方－

本単元では、プログラミング言語 BASIC を使用すること（教科書）が多い。しかし、本授業では数学に関する処理に優れた数式処理ソフトウェア *Mathematica* を使用する。BASIC と違い、曲線を描く際に座標軸に神経をはらわずに実行できたり、簡単な処理でアニメーション化できたりするからである。この機能を活用することにより、生徒がコンピュータを直接操作しながら、数学のもつ楽しさ・美しさを実感（体感）できるようにしていく。

9 教材・教具

(1) ワークシート

リサージュ曲線と正業曲線

1 曲線の媒介変数表示

曲線C上の点P(x, y)の座標が、変数tによって

$$\begin{cases} x = \square \\ y = \square \end{cases}$$

の形で表されたとき、この表示を曲線Cの「 t 」という、変数tのことを「 t 」という。

⇒注 媒介変数が一般角のときは θ を使うが、MATHEMATICAでは t を使うことにする。

2 曲線の極方程式

平面上の曲線Cが、極座標(r, θ)の方程式

$$r = \square$$

で表されるき、この方程式を曲線Cの「 θ 」という。

⇒注 極座標では偏角は θ を使うが、MATHEMATICAでは t を使うことにする。

3 リサージュ曲線

媒介変数表示

$$\begin{cases} x = \square \\ y = \square \end{cases}$$

で表される曲線を「 \square 」という。

【例題1】 曲線の概形を予想 → 提示用モニタを見ながらプログラムを入力

次のリサージュ曲線をかき。

- (1) $x = 3\cos 3t, y = 3\sin 2t$
- (2) $x = \cos 3t, y = \sin nt$ の n の値を 1 から 6 まで変化させた場合

【演習1】 曲線の概形を予想 → コンピュータにプログラムを入力・実行

次のリサージュ曲線をかき。

- (1) $x = \cos 6t, y = \sin 5t$
- (2) $x = 3\cos 4t, y = 3\sin 5t$
- (3) $x = 3\cos 4t, y = 3\sin nt$ の n の値を 1 から 6 まで変化させた場合

4 正業曲線

極方程式

$$r = \square$$

で表される曲線を「 \square 」という。

【例題2】 曲線の概形を予想 → 提示用モニタを見ながらプログラムを入力

正業曲線 $r = \sin 2t$ をかく。

【演習2】 曲線の概形を予想 → コンピュータにプログラムを入力・実行

極方程式 $r = 2\sin kt$ の k の値を 1 から 6 まで変化させた場合について正業曲線をかけ。

【問題】 極方程式 $r = 2\sin kt$ の k の値と正業曲線の葉の数について、次の問いを考えよう。

- (1) k の値と正業曲線の葉の数の間には、どのような規則性があると考えられるだろうか。

【考えられる規則性】

- (2) (1)の規則性が正しいかどうかを k の値をいろいろ変えることで確かめてみよう。

kの値	葉の数

時間が余ったら、 k と n の値をいろいろと変えてかいてみよう!

【演習3】 曲線の概形を予想 → コンピュータにプログラムを入力・実行

次の極方程式で表される曲線をかけ。ただし、 a, b の値は各自で決める。

- (1) $r = at$
- (2) $r = a(1 + \cos t)$
- (3) $r = a + b\cos t$

3年 組 番 氏名 _____

(2) ソフトウェア - Mathematica Ver.4.1 日本語版, Wolfram Research, Inc.

生徒が下記の画面に、プログラムを入力しながら授業を受けるという形態で行う。そして、コンピュータ画面の結果を見てワークシートへの記入をするという方法をとる。

