

数 学 科 学 習 指 導 案

日 時 平成 19 年 11 月 30 日 (金) 第 5 校時

対 象 者 全日制課程 普通科 2 年 5 組 12 名

授 業 者 名 東京都立千歳丘高等学校 教諭 石井 啓

場 所 2 号館 3 階 第 1 多目的室

1 単元名 2 章 図形と方程式 2 節 円の方程式

教科書 正田 實 他, 『高等学校 新数学 II』, 第一学習社, 平成 15 年.

副教材 岡谷 仁, 神永 浩 編, 『アクセスノート 数学 II』, 実教出版, 平成 15 年.

2 単元の目標

- ・平面上で, 与えられた条件から円の方程式が求められる。
- ・円の方程式が $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ の形で表されることを理解し, この形から中心と半径が求められる。
- ・円と直線の位置関係を共有点の個数によって分類し, 2 次方程式の判別式との関係についての理解を深める。
- ・原点を中心とする円周上の点における接線の方程式が求められる。

3 生徒の実態 【学年】

- ・定員割れのため, 全員合格となった生徒たちである。そのため, 例年より上位層の生徒が少ない。第 1 学年次に約 50 名の転退学者が出ており, 状況の変化が生じているが, 例年よりも下位層の生徒は多い。

入学年度	平均	最高	最低
平成 15 年度	52.7	88	15
平成 16 年度	53.9	90	29
平成 17 年度	54.6	90	15
平成 18 年度	45.3	79	0
平成 19 年度	49	80	15

※本校の入学選抜のための学力検査(数学)の結果
本校に入学した生徒の平均点, 最高点, 最低点

- ・第 1 学年次は授業を受ける姿勢が確立できていない生徒が多く, 授業中の私語や立ち歩きが目立っていた。第 2 学年になってからは, 授業中の私語や立ち歩きも少なくなり, 授業を受ける姿勢が身についてきている。
- ・考査得点が中位層以上の生徒でも, 小学校における知識(特に計算)にかなり不安がある生徒が少なくない。

【クラス】

- ・本校では, 第 2 学年次より α 系(文系)・ β 系(理系)の 2 つの系に分かれる。HR は, α 系・ β 系混合クラスが 4 つ, α 系単独クラスが 2 つとなっている。本授業のクラスは, α 系の単独クラスである。
- ・1 クラス 2 展開の習熟度別授業を行っている。本授業のクラスは数学を苦手とする

生徒で編成（A コースと呼称）されている。

- ・参考までに過去 3 回の定期考査の平均点をあげておく。

	本クラス	学年 (A)	最高 (A)	最低 (A)	学年 (B)	最高 (B)	最低 (B)	学年
1 学期中間	23.3	41.5	56.2	18.5	53.9	65.7	43.2	46.8
1 学期期末	49.8	59	66.4	40	78.1	88.8	72.0	67
2 学期中間	24.8	36.5	48.2	23.9	53.5	64.3	38.3	43.8

※考査問題は A コース・B コース共通問題で実施

- ・数学が苦手な生徒が多いため、年度当初は発問に対する答えも「分からない」がほとんどであった。しかし、1 学期末からそれも徐々に少なくなり、現在は誤答であっても何かしらの答えが返ってくるが多くなった。
- ・上記のようであったり、ノートをしっかりと取ったりというように、授業を受ける態度は良好である。ただ、1 学期と比べて意気込みは萎えてきているように感じる。例えば、1 学期は赤点を取らないようにしようという空気があり、提出物の提出率が高かった。しかし、現在はそのような空気は薄れ、提出率も低くなっている。
- ・公式を 1 つ使えば解けたり、1 つの手順で解けたりするような問題に対しては取り組めるようになってきている。しかし、公式を複数使ったり、解答を得るのにいくつかの手順を踏んだりするような問題に対しては取り組むのをあきらめてしまう。本単元では、いくつかの手順を踏むような問題が多いので、この点に留意した指導が必要である。

4 単元について 【図形と方程式および円の方程式】

- ・座標や式にかかわる内容については、中学校と数学 I で扱う関数のグラフがある。ただ、いずれの場合も関数についての考察や理解を中心とした扱いとなっている。「図形と方程式」では、座標を用いて直線図形および円などの基本的な平面図形の性質や関係を調べる「解析幾何」の方法を理解させ、活用できるようにすることが中心となる。また、図形を表す等式においても y が x の関数という見方ではなく、 x と y は同じ平面上の点を表す値として対等な意味で扱われる。
- ・円を定点からの距離が一定である点の集合と考えて、その方程式を導き、円についての考察をすすめる。また、円と直線が「交わる」、「接する」という視覚的認識を、2 次方程式の解の個数として考えることで、論理的に考察をすることになる。

【年間指導計画における位置づけ】

- ・今年度は第 1 学年で履修した数学 I の三角比との連絡をよくするために、三角関数から学習を始めた。その後、指数関数・対数関数と学習をすすめた（3 章に相当）。そのため、本単元が含まれる 2 章は 2 学期に学習することとした。
- ・2 章で扱う内容（座標や直線の方程式）が微分と積分*（4 章に相当）に関連した内容の復習にもつながると考え、2 学期の中間考査後に 2 章を学習することとした。
※微分と積分（4 章）は数学 III との連絡をよくするために 3 学期に学習をすることとしている。

【教材の関連性】

- ・中学校では円を図形的に扱ってはいるが、1点から等距離にある点の集合というとはえ方はしていない。そのため、円の方程式を導くときには、その点に留意した指導が必要となる。また、円の接線の定義と性質は、中学1年次に作図とともに学習している。なお、円そのものが考察の対称となるのは中学2年生のとき以来となるので、円の性質などの既習内容についての確認も必要である。
- ・本単元では、「円の方程式を導く」のに前節で学習した「2点間の距離」、「円の方程式の一般形から標準形への変形」に数学Iで学習した「平方完成」、「円と直線の位置関係の判断」に1学期に学習した「2次方程式の判別式」、「円の接線の方程式を求める」のに前節で学習した「直線の垂直条件」というように、基本事項であっても既習内容を積極的に使って考察をする場面が多い。そのため、本授業の生徒に対しては適宜復習を取り入れていく必要がある。

5 単元の評価規準

	ア 関心・意欲・態度	イ 数学的な見方・考え方	ウ 技能・表現	エ 知識・理解
単元の評価規準	円を方程式で表す考え方に関心をもつとともに、それを事象の考察に進んで活用しようとする。	円を方程式で表すための数学的な見方や考え方を身につけ、直線との位置関係を論理的に考える。	円を方程式で表現する仕方を身につけ、よりよく問題を解決する。	円を方程式で表すための原理、用語・記号などを理解し、基礎的な知識を習得する。
学習活動に即した具体的な評価基準	①円を表す方程式に関心をもち、円の方程式を求めようとする。 ②円と直線の位置関係に関心をもち、調べようとする。	①円の方程式を導く過程を考察できる。 ②円と直線の位置関係を調べる過程を考察できる。 ③円の接線の方程式を導く過程を考察できる。	①いろいろな条件で定まる円の方程式を求められる。 ②円と直線の位置関係を調べられる。 ③円の接線の方程式を求められる。	①円の方程式について理解している。 ②円の接線の方程式について理解している。

6 単元の指導計画と評価計画（4時間扱い）

時間	学習内容	評価規準【評価方法】
第1時	中心と半径から円の方程式を求める。	ア-①・イ-①・ウ-① 【観察・プリント】
第2時	円の方程式から中心と半径を求める。	エ-① 【観察・プリント】
第3時	円と直線の位置関係を調べる。	ア-②・イ-②・ウ-② 【観察・プリント】
第4時 (本時)	円の接線の方程式を求める。	イ-③・ウ-③・エ-② 【観察・プリント】

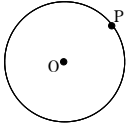
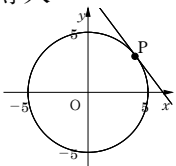
7 授業観察の視点 【新しい学習内容を通しての既習内容の復習】

本時は期末考査前の最後の授業であり、中間考査まではまとめに当てている時間である。今回は研究授業ということもあり、「接線の方程式を求める」ということを通して、考査の主要内容である「直線の方程式に関する事項」を復習していくことにした。

8 本時 (第 4 時)

(1) 本時の目標 ・ 原点が中心の円周上の点における接線の方程式を求めることができる。

(2) 本時の展開

時間	○学習内容 ●学習活動	指導上の留意点	評価規準 [評価方法]
導入 (10分)	<p>○円 O 上の点 P を接線とする接線 l の作図</p>  <p>●作図をする。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 半径と接線が垂直の位置関係であることを確認する。 	
展開 I (15分)	<p>○接線の方程式を求めるために座標を導入</p>  <p>●自分のかいた図に座標軸を入れる。</p> <p>○直線の方程式を求めるためには、何が必要なかを確認</p> <ul style="list-style-type: none"> 直線の傾き 直線が通る点 (通過点) <p>●分かっていること, 分かっていることを確認する。</p> <ul style="list-style-type: none"> 傾きが分からない 通過点は, P(4, 3) <p>○学習した傾きの求め方の復習</p> <p>●傾きの求め方を確認する。</p> <ul style="list-style-type: none"> 直線が通る 2 点から 平行条件 垂直条件 <p>○傾きを求める方法の決定</p> <p>●傾きを求めるために, 垂直条件を利用することを確認する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 生徒が作図したものに座標軸を入れ, 点に座標を与える。 円を $x^2 + y^2 = 25$, 接点を P(4, 3) とする。 前節で学習した内容であることを確認する。 前節で学習した内容であることを確認する。 半径と接線の位置関係を確認しながら, 垂直条件の利用に気づかせる。 	<ul style="list-style-type: none"> 直線の方程式の求め方を理解している。 エ-② [観察]

展開 Ⅱ (20分)	<p>○接線の方程式の求め方の確認</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px; text-align: center;">直線 OP の傾きを求める</div> <p style="text-align: center;">↓</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px; text-align: center;">垂直条件を使って接線の傾きを求める</div> <p style="text-align: center;">↓</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px; text-align: center;">傾きと通過点から接線の方程式を求める</div> <p>○直線 OP の傾き</p> <p>● 原点 O(0, 0) と接点 P(4, 3) の 2 点から直線 OP の傾きを求める。</p> $\frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4}$ <p>○接線の傾き</p> <p>● 垂直条件より接線の傾きを求める。</p> $m \times \frac{3}{4} = -1 \quad \therefore m = -\frac{4}{3}$ <p>○接線の方程式</p> <p>● 傾きと通過点から接線の方程式を求める。</p> $y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 4)$ $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$ <p>○問題 次の円上の点における接線の方程式を求めよ。</p> <p>(1) 円 $x^2 + y^2 = 5$ 点(-2, 1)</p> <p>(2) 円 $x^2 + y^2 = 2$ 点(-1, 1)</p> <p>●問題 を解く。</p> <p>答 (1) $y = 2x + 5$ (2) $y = x + 2$</p>	<p>・接線の方程式を求めるには、3 つのステップを踏むことを理解させる。</p> <p>・直線 OP の傾きは、直線が通る 2 点から求める方法を使うことを確認する。</p> <p>・点が円上にあることを確認するように指示する。</p> <p>・終了後に解答の載ったプリントを配布する。</p>	<p>・イ-③ [観察]</p> <p>・直線が通る 2 点から直線の傾きを求められる。</p> <p>・ウ-③ [プリント]</p>
------------------	---	--	---

まとめ (5分)	○期末考査に関する内容のまとめプリントの配布と説明 ○期末考査後の提出物などについての確認	・授業で使用したプリントの回収を指示する。
-------------	--	-----------------------

(3) 座席配置

スクリーン・黒板

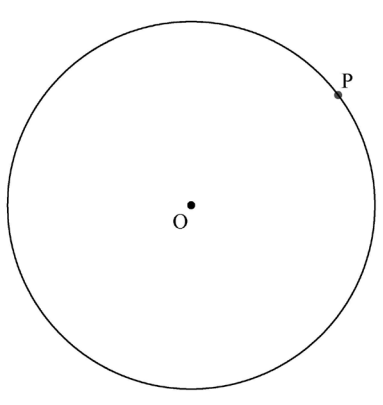
κ	η	δ	α
λ	θ	ε	β
μ	ι	ς	γ

(4) ワークシート

2年 組 番 氏名 _____

円の接線の方程式を求めよう

問題① 次の円上の点Pにおける接線を作図せよ。



点Oを原点としてx軸、y軸を入れ、円の方程式と点Pの座標を次のようにする。

円の方程式:

点Pの座標:

問題② 接線の方程式を求めよ。

I 直線の方程式を求めるには何が必要か？(直線の命)

-
-

II 直線の傾きの求め方

-
-
-

III 接線の方程式の求め方

↓

↓

9 参考資料

本時の授業に関係する公式などをまとめておく。なお、図は例に関するものである。

9.1 直線の方程式

- (1) 1 点を通り、傾きが m の直線の方程式の求め方

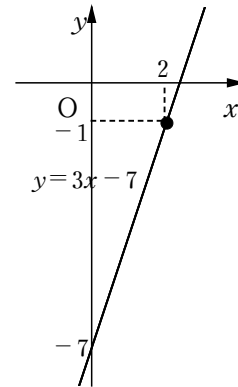
点 $A(x_1, y_1)$ を通り、傾きが m の直線の方程式は、

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

例 点 $(2, -1)$ を通り、傾きが 3 の直線の方程式は、

$$y - (-1) = 3(x - 2)$$

$$y = 3x - 7$$



- (2) 2 点を通る直線の方程式の求め方

点 $A(x_1, y_1)$, 点 $B(x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は、

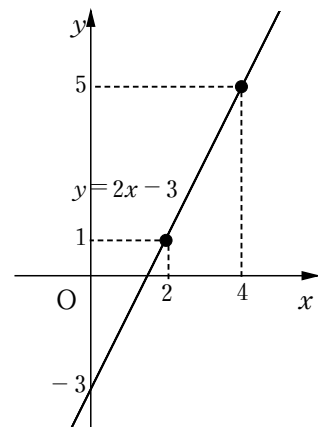
$$x_1 \neq x_2 \text{ のとき, } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

例 2 点 $(2, 1)$, $(4, 5)$ を通る直線の方程式は、

$$y - 1 = \frac{5 - 1}{4 - 2}(x - 2)$$

$$y - 1 = 2(x - 2)$$

$$y = 2x - 3$$



- (3) 2 直線の平行条件

2 直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ について、

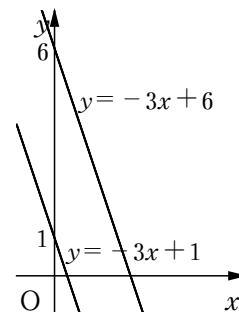
$$\text{平行} \iff m = m'$$

例 2 直線 $y = -3x + 1$, $y = -3x + 6$ の傾きは、ともに

$$-3$$

であるから、

この 2 直線は平行である。



- (4) 2 直線の垂直条件

2 直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ について、

$$\text{垂直} \iff mm' = -1$$

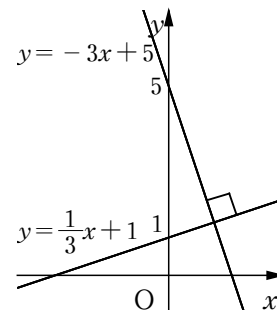
例 2 直線 $y = -3x + 5$, $y = \frac{1}{3}x + 1$ の傾きは、それぞれ

$$-3, \frac{1}{3}$$

であるから、傾きの積は

$$(-3) \times \frac{1}{3} = -1$$

よって、この 2 直線は垂直である。



9.2 円の方程式

- (1) 円の方程式

点 (a, b) を中心とし、半径が r の円の方程式は、

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

例 点 $(2, -3)$ を中心とし、半径が2の円の方程式は、

$$(x-2)^2 + \{y-(-3)\}^2 = 2^2$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$$

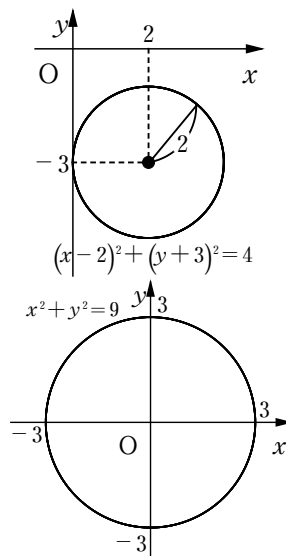
特に、原点を中心とし、半径が r の円の方程式は、

$$x^2 + y^2 = r^2$$

例 原点を中心とし、半径が3の円の方程式は、

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 = 9$$



(2) 円と直線の位置関係

円の方程式と直線の方程式から y を消去して得られる2次方程式の判別式(参考)を D とするとき、一般に次のことがいえる。

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
円と直線の共有点の個数	2個	1個	0個
円と直線の位置関係	異なる2点で交わる	接する	離れている

例 円 $x^2 + y^2 = 2$ と直線 $y = x + 3$ の共有点について考える。

$y = x + 3$ を $x^2 + y^2 = 2$ に代入して整理すると、

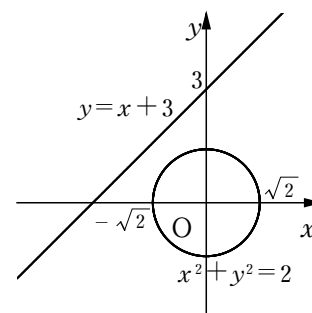
$$2x^2 + 6x + 7 = 0$$

したがって、判別式 D は

$$D = 6^2 - 4 \times 2 \times 7 = -20 < 0$$

となるので、実数解をもたない。

よって、円と直線は共有点をもたない。このとき、円と直線は離れている。



(3) 円の接線の方程式

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は、

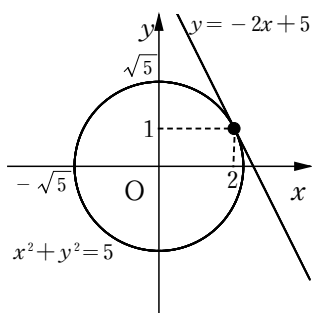
$$x_1x + y_1y = r^2 \quad \text{注. 本授業の生徒は、この公式を未習である。}$$

例 円 $x^2 + y^2 = 5$ 上の点 $(2, 1)$ における接線の方程式は、

$$2 \times x + 1 \times y = 5$$

$$2x + y = 5$$

$$y = -2x + 5$$



参考

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に対して

$$D = b^2 - 4ac$$

を2次方程式の判別式という。

(i) $D > 0 \iff$ 異なる2つの実数解

(ii) $D = 0 \iff$ 重解 (1つの実数解)

(iii) $D < 0 \iff$ 異なる2つの虚数解

