5. ベクトルと図形

1. 一直線上にある点

2 点 A，B が異なり，点 C が直線 AB 上にある

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ となる実数 } k \text{ がある}$$

2. ベクトルの分解

$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき，$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$

$$\iff s=s',\ t=t' \ (s,\ t,\ s',\ t'\in\mathbb{R})$$

3. 内積の利用

[1] なす角は $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}$ から求める。

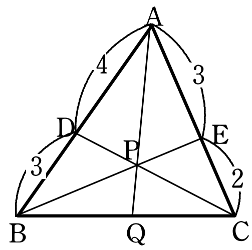
[2] $\mathrm{AB}\perp\mathrm{CD} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0 \quad (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\fallingdotseq 0,\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}\fallingdotseq 0)$

[3] $\mathrm{AB}^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

例題

1. 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 3：2 に内分する点を E，対角線 BD を 2：5 に内分する点を F とする。このとき，3 点 E，F，C は一直線上にあることを証明せよ。

2. △ABC において，辺 AB を 4：3 に内分する点を D，辺 AC を 3：2 に内分する点を E とし，2 つの線分 CD，BE の交点を P とする。また，線分 AP の延長と辺 BC の交点を Q とする。
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

3. $\mathrm{OA}=2\sqrt{2}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$ である $\triangle\mathrm{OAB}$ の垂心を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

4．$\angle A=60^\circ$，$AB=8$，$AC=5$ である $\triangle ABC$ の内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき

(1) $\overrightarrow{AD}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。