3. ベクトルの内積

1. ベクトルの内積

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とする。

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}$$

注　$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

2. ベクトルの垂直・平行と内積

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ とする。

垂直条件　$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2=0$

平行条件　$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$　　$\leftarrow \theta=0^\circ,\ 180^\circ$

$\iff a_1b_2-a_2b_1=0$

3. 内積の性質

[1]　$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

[2]　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

[3]　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

[4]　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

[5]　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　　ただし，k は実数

参考　[1] より　　$\vec{a}\cdot\vec{a}\geqq0$, $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

4. 三角形の面積

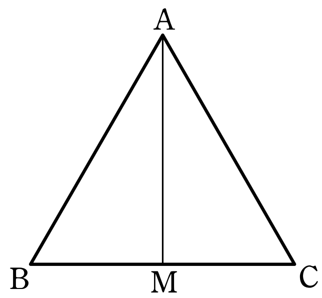
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{q}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}$ とすると，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}=\frac{1}{2}|p_1q_2-p_2q_1|$$

例題

1. 1辺の長さが2である正三角形ABCの辺BCの中点をMとするとき，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$



2. $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(-5,\ 1)$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

3. $\vec{a}=(1,\ -2)$ とのなす角が 45° で，大きさが $\sqrt{10}$ のベクトルを求めよ。

4. $\vec{a}=(k,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$ とする。$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が次のようになるとき，定数 k の値を求めよ。

(1)　垂直　　(2)　平行

5. 等式 $12|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2=|3\vec{a}+\vec{b}|^2+3|\vec{b}-\vec{a}|^2$ を証明せよ。

6. $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。　　(2)　$|2\vec{a}-3\vec{b}|$ の値を求めよ。

7. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}+\vec{b}|=2$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直になるように，実数 t の値を定めよ。

8. 平面上に 4 点 O，A，B，C がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=1$，$\mathrm{OC}=\sqrt{2}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を求めよ。